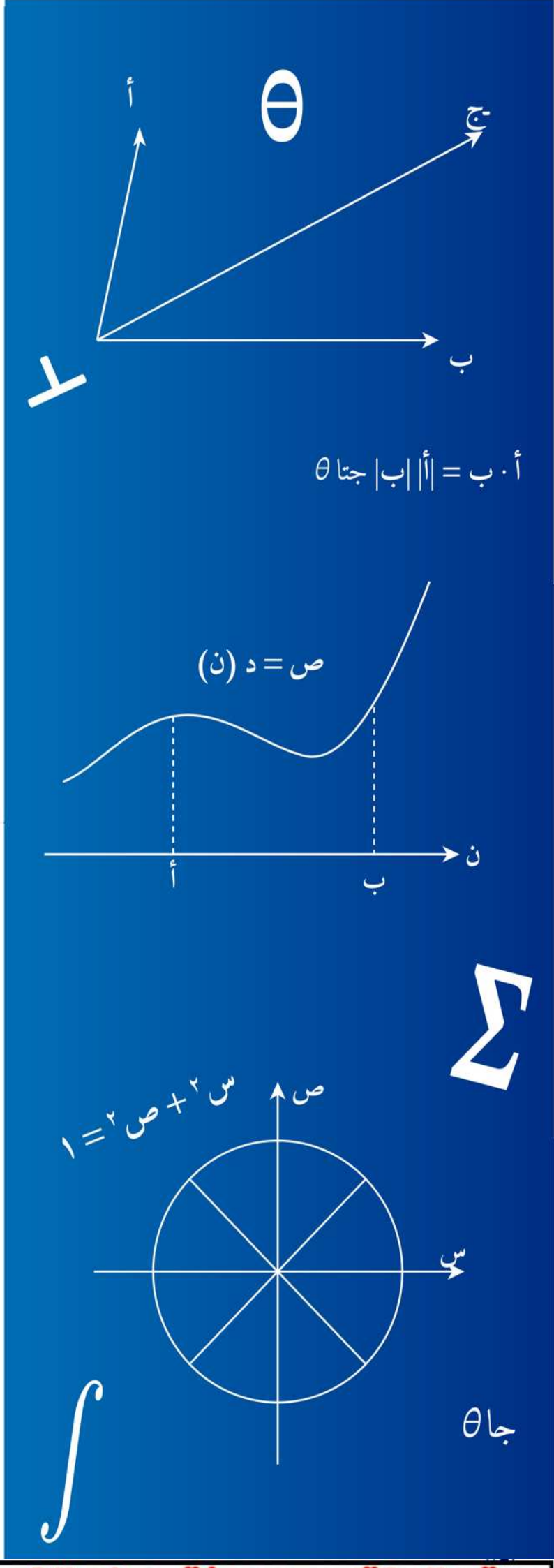


رياضيات

الصف الثاني بكالوريا

الجزء الأول

11

SPRIX

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

Mathematics

Egyptian Baccalaureate

2nd Year

The International Baccalaureate™

has reviewed the pedagogical and assessment approaches underpinning this textbook.

© 2026 Ministry of Education and Technical Education

All rights reserved.

Copyrights and accountability for the content of this textbook remain with the Ministry of Education and Technical Education.

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system,

or transmitted in any form or by any means - electronic, mechanical, photocopying, recording,

or otherwise - without the prior written permission of the copyright holders.

Ministry of Education and Technical Education

New Administrative Capital

Cairo, Egypt

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

المقدمة

انطلاقًا من رؤية نظام البكالوريا المصرية والتزامه بإعداد المتعلمين لمواجهة متطلبات القرن الحادي والعشرين، جاء تأليف كتاب الرياضيات للصف الحادي عشر ليتيح للطلاب خبرة تعلّم عميقة وجذّابة ومُحفّزة للتفكير. وقد بُني المنهج على ترسيخ الفهم العميق، وتنمية الثقافة الرياضية، وإكساب الطلاب القدرة على توظيف المعرفة والمهارات الرياضية في سياقات الحياة الواقعية.

تقوم فلسفة هذا الكتاب على التعلّم القائم على الاستقصاء؛ إذ يبني الطلاب معارفهم بأنفسهم من خلال الملاحظة وطرح الأسئلة والتحرّي والاستدلال المستند إلى الأدلة. ويبدأ التعلّم بمسائل ذات معنى ومواقف أصيلة وخبرات استكشافية تُثير فضول المتعلمين وتدفعهم إلى البحث عن تفسيرات للأنماط والعلاقات والبِنى الرياضية التي تتجلّى في العالَم من حولهم. وبهذا المدخل يُوجّه الطلاب إلى اكتشاف الأنماط وصياغة التخمينات وتبريرها، وإلى بناء فهمهم الرياضي قبل التعامل مع المفاهيم والمبادئ والإجراءات والنماذج في صورتها المُجرّدة.

يعكس تنظيم كل درس تدرّجًا متماسكًا من الاستكشاف إلى بناء المفهوم ثم التطبيق، وفق مسار المدخل ثم التهيئة ثم الشرح ثم جرّب ثم التمارين. فتُعرض على الطلاب في البداية سياقات ومسائل وأمثلة مختارة بعناية تربط التعلّم الجديد بخبراتهم اليومية وبما سبق لهم تعلّمه. وتؤدي هذه المداخل دور المُحفّز على الاستقصاء، فتدعو المتعلمين إلى تحليل المعلومات وتفسير التمثيلات وتمييز الأنماط وصياغة تفسيرات أولية. وبعد هذه المرحلة الاستكشافية ينتقل الطلاب إلى المفاهيم والمبادئ والإجراءات والنماذج الرياضية التي تقوم عليها تلك المواقف، والتي توفّر إطارًا مُنظّمًا للفهم. وقد رُتّب المحتوى عن قصد بما يُعزّز الفهم العميق بدلًا من الحفظ الصمّ، فيتمكّن المتعلم من إدراك العلاقات بين المفاهيم، وإقامة روابط ذات معنى بين الأفكار، وتوظيف ما تعلّمه بثقة في السياقات المألوفة وغير المألوفة على السواء. ومن خلال مرحلتي جرّب والتمارين تُتاح للطلاب فرص الممارسة والتطبيق وتقويم فهمهم، وصولًا إلى فهم راسخ ومتماسك ومترابط للرياضيات.

يُتيح هذا الكتاب فرصًا واسعة لحل المسائل والنمذجة الرياضية والبحث المستقل. ويُشجّع الطلاب على اختبار الأفكار، وجمع البيانات وتحليلها، وتقويم الاستدلالات، واستخلاص نتائج مُبرّرة. وبهذه الخبرات تنمو لديهم الثقة في توظيف التفكير الرياضي، فيصيرون شركاء فاعلين في بناء المعرفة لا مُجرّد متلقين لها.

يتكامل التقويم مع مسار التعلّم بوصفه أداة للتعلّم والتحسين معًا. وقد ضُمّنت الدروس أنماطًا مُتنوّعة من أدوات التقويم التكويني والختامي تُعين الطلاب على متابعة تقدّمهم، وتحديد جوانب النمو لديهم، وإظهار ما بلغوه من فهم. كما صِيغت مهام التقويم بعناية لتُحاكي طبيعة الأسئلة التي قد يواجهونها في الامتحانات، مع تنمية مهارات التفكير العليا والاستدلال التحليلي وتوظيف المعرفة في سياقات غير مألوفة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حظيت طبيعة الرياضيات بعناية خاصة تُبرزها بوصفها ركنًا أساسيًا من أركان الثقافة الرياضية. فتُتاح للطلاب فرص لإدراك كيف تُبنى المعرفة الرياضية وتُبرّر وتُنقّح ويجري تداولها داخل المجتمعات الرياضية. ويُعنى المنهج كذلك بتقدير إسهامات علماء الرياضيات والمبتكرين الذين أسهمت أفكارهم واكتشافاتهم في تشكيل فهمنا للعالَم الرياضي وفي دفع مسيرة التقدّم الإنساني.

يُنمّي الكتاب بصورة منهجية مهارات العمليات الرياضية، ومنها حل المسائل، والاستدلال، والتمثيل، والتواصل، والنمذجة، والتقدير، والتعرّف على الأنماط، وتفسير البيانات، والبرهان. وقد دُمجت هذه المهارات في خبرات التعلّم لضمان ألّا يقتصر الأمر على اكتساب المعرفة الرياضية، بل يمتد إلى تنمية الكفايات اللازمة للتفكير والعمل على نحو رياضي.

ومواكبةً لتطلّعات التعليم المعاصر، يُعزّز المنهج الوعي العالمي والانفتاح على العالَم من خلال ربط المفاهيم الرياضية بالممارسات العلمية والابتكارات التقنية والتحدّيات البيئية وأهداف التنمية المستدامة. ويُشجّع الطلاب على تقدير الطبيعة المترابطة للمعرفة، وإدراك دور الرياضيات في معالجة القضايا التي تمسّ المجتمعات على المستويات المحلية والوطنية والعالمية.

ويسعى المنهج فضلًا عن ذلك إلى تنمية التفكير الناقد والتفكير الإبداعي، عبر إشراك الطلاب في تحليل المعلومات، وتقويم الاستراتيجيات البديلة، وابتكار حلول جديدة، وتوظيف المعرفة الرياضية في مواجهة تحدّيات واقعية. ويُدعى المتعلمون إلى مقاربة المسائل بعقل عالِم الرياضيات والعالِم والمهندس، مستعينين بالاستدلال المنهجي والتفكير التصميمي في بحث الأسئلة وتطوير حلول عملية.

ومن أبرز سمات هذا الكتاب الربط المقصود بين الرياضيات وحياة الطلاب وخبراتهم. فعلى امتداد الفصول تُعرض الأفكار الرياضية في سياقات ذات معنى، مدعومةً بتطبيقات معاصرة مستمدة من العلوم والهندسة والتقنية والاقتصاد والبيانات والاستدامة والحياة اليومية. وتُبرز هذه الروابط قيمة الرياضيات وتُعين المتعلمين على تقدير أثرها في فهم العالَم من حولهم وفي تحسينه.

ولا يقلّ عن ذلك أهميةً حرص المنهج على ترسيخ التعلّم التأمّلي. فيُشجّع الطلاب على ممارسة التقويم الذاتي والتأمّل ما وراء المعرفي، بما يُمكّنهم من متابعة فهمهم، وتقويم استراتيجيات تعلّمهم، وتحمّل مسؤولية متنامية عن نموّهم الأكاديمي. وبتأمّلهم فيما يتعلّمونه وفي كيفية تعلّمه، تترسّخ لديهم عادات المتعلم مدى الحياة، القادر على التكيّف مع ما يستجدّ من تحدّيات وفرص.

وغاية ما يصبو إليه هذا الكتاب إعداد متعلمين متمكّنين رياضيًا، مسؤولين، مبتكرين، مزوّدين بما يلزم من معارف ومهارات وقيم واتجاهات للنجاح في عالَم سريع التغيّر. ويَحدونا الأمل أن تُلهم رحلة التعلّم هذه طلابنا استكشاف الرياضيات بفضول، والتفكير بدقة، والعمل بمسؤولية، والإسهام إسهامًا ذا معنى في تقدّم المجتمع وفي بناء مستقبل مستدام للإنسانية.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الفهرس

رياضيات — الصف الثاني بكالوريا — الجزء الأول

الفصل ١ — البراهين الجبرية

المفهوم ١ نظرية ذات الحدين ونظرية متعددة الحدود ٣

المفهوم ٢ قسمة كثيرات الحدود ١٠

المفهوم ٣ التعبيرات النسبية ١٤

المفهوم ٤ المتطابقات والبراهين ٢١

المفهوم ٥ المتباينات ٣١

الفصل ٢ — المتتابعات

المفهوم ١ المتتابعات الحسابية ٤٠

المفهوم ٢ المتتابعات الهندسية ٥٧

المفهوم ٣ التجميع ٦٨

المفهوم ٤ متتابعات متقدّمة ٨٥

المفهوم ٥ علاقات التكرار والاستقراء ٩١

الفصل ٣ — الأعداد المركّبة والمعادلات

المفهوم ١ العدد المركّب ١٠٧

المفهوم ٢ المعادلات التربيعية ١١٦

المفهوم ٣ المعادلات ذات الدرجة العالية ١٤٥

الفصل ٤ — الهندسة والمعادلات

المفهوم ١ أساسيات الهندسة الإحداثية ١٥٣

المفهوم ٢ المثلثات والمستقيمات ١٦٥

المفهوم ٣ الدوائر ١٨٢

١-١
الرياضيات

نظرية ذات الحدين

الفصل الأول البراهين الجبرية

المفهوم ١ ٠ نظرية ذات الحدين ونظرية متعددة الحدود

تأمل الصفوف الأولى من مثلث باسكال، ولاحظ كيف يتغير عدد الحدود في كل صف أفقي كما في الشكل. فإذا تتبعت هذا النمط، فكم حدًّا يقع في الصف العاشر؟

السؤال الموجّه: كيف تتنبّأ الصيغ الجبرية ومعاملات التوافيق بالمعامل الدقيق لأي حدّ في مفكوك $(س_١ + س_٢)^{ن}$ دون إجراء عمليات ضرب متتابعة؟

نواتج التعلّم

يُطبّق نظرية ذات الحدين في إيجاد مفكوك المقادير الجبرية وفي تعيين معاملات حدود معيّنة.

لاحظ!

حساب $ن ق_ر$

$$ن ق_ر = \frac{ن!}{ر! \, (ن - ر)!}$$

مثال: $٥ ق_٣ = \frac{٣ \times ٤ \times ٥}{١ \times ٢ \times ٣} = ١٠$

$ن ق_٠ = ١$ $ن ق_ن = ١$

مثال: $٠ ق_٠ = ١$

مثال: $٥ ق_٥ = ١$

عند فَكّ أقواس $(أ + ب)^{ن}$، الحدّ المحتوي على $أ^{ن - ل} ب^{ل}$ يُصبح $ن ق_ر \, أ^{ن - ل} ب^{ل}$.

أُسّ ( )

أُسّ ب

مثال: عند فَكّ أقواس $(أ + ب)^{٥}$، الحدّ $أ^{٣} ب^{٢}$ هو:

$$٥ ق_٢ \, أ^{٣} ب^{٢} = \frac{٤ \times ٥}{١ \times ٢} أ^{٣} ب^{٢} = ١٠ أ^{٣} ب^{٢}$$

مثال: عند فَكّ أقواس $(س - ٢ص)^{٦}$، الحدّ $س^{٤} ص^{٢}$ هو:

بما أنّ أُسّ س هو ٤ وأُسّ $-٢ص$ هو ٢،

$$٦ ق_٢ \times س^{٤} \times (-٢ص)^{٢} = \frac{٥ \times ٦}{١ \times ٢} \times س^{٤} \times (-٢ص)^{٢} = ١٥ \times س^{٤} \times ٤ \times ص^{٢} = ٦٠ س^{٤} ص^{٢}$$

فَكّ أقواس $(أ + ب)^{ن}$ (نظرية ذات الحدين)

$$(أ + ب)^{ن} = ن ق_٠ \, أ^{ن} + ن ق_١ \, أ^{ن - ١} ب + ن ق_٢ \, أ^{ن - ٢} ب^{٢} + \cdots + ن ق_ر \, أ^{ن - ل} ب^{ل} + \cdots + ن ق_ن \, ب^{ن}$$

مثال:

$$(س + ٢)^{٥} = {}^{\bullet}{}_{٥} ق_٠ \times س^{٥} + {}^{\bullet}{}_{٥} ق_١ \times س^{٤} \times ٢ + {}_{٥} ق_٢ \times س^{٣} \times ٢^{٢} + {}_{٥} ق_٣ \times س^{٢} \times ٢^{٣} + {}_{٥} ق_٤ \times س \times ٢^{٤} + {}^{\bullet}{}_{٥} ق_٥ \times ٢^{٥}$$

ابدأ بـ $٥ ق_٠$
أُسّ س: ٥
أُسّ ٢: ٠

أُسّ س: ٤
أُسّ ٢: ١

أُسّ س: ٠
أُسّ ٢: ٥

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معامل س^{٤} في مفكوك $(٢س^{٢} - ٣)^{٧}$

٢ أوجد مفكوك $(٣س - ٢)^{٤}$

طريقة الحل

١ في مفكوك $(٢س^{٢} - ٣)^{٧}$، الحدّ س^{٤} له أُسّ ٢ بالنسبة لِ ٢س^{٢}، وأُسّ ٧ – ٢ = ٥ بالنسبة لِ –٣

$$ق_{٧} (٢س^{٢})^{٢} \times (-٣)^{٥}$$

$$= \frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥} \times س^{٤} \times (-٢٤٣)$$

$$= \underline{-٢٠٤١٢ س^{٤}}$$

إذن، معامل س^{٤} هو $\underline{-٢٠٤١٢}$

٢ مفكوك باستخدام نظرية ذات الحدين.

$$(٣س - ٢)^{٤} = ق_{٤}{}_{٠} \times (٣س)^{٤} + ق_{٤}{}_{١} \times (٣س)^{٣} \times (-٢) + ق_{٤}{}_{٢} \times (٣س)^{٢} \times (-٢)^{٢} + ق_{٤}{}_{٣} \times ٣س \times (-٢)^{٣} + ق_{٤}{}_{٤} (-٢)^{٤}$$

$$= ١ \times (٣س)^{٤} + \frac{٤}{١} \times (٣س)^{٣} \times (-٢) + \frac{٣ \times ٤}{١ \times ٢} \times (٣س)^{٢} \times (-٢)^{٢} + \frac{٢ \times ٣ \times ٤}{١ \times ٢ \times ٣} \times ٣س \times (-٢)^{٣} + ١ \times (-٢)^{٤}$$

$$= \underline{٨١س^{٤} - ٢١٦س^{٣} + ٢١٦س^{٢} - ٩٦س + ١٦}$$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معامل الحدّ المحدَّد في [ ] لفَكّ الأقواس الآتية.

(أ) $(٢س - ٣ص)^{٧}$ [س^{٦}ص]

(ب) $(٣س - ٢)^{٥}$ [س^{٢}]

(جـ) $(٣أ^{٢} - ٢)^{٨}$ [أ^{٦}]

٢ أوجد مفكوك التعبيرات الآتية.

(أ) $(س + ٢)^{٦}$

(ب) $(٣أ - ٢ب)^{٥}$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ المسألة ٢ ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معامل الحدّ المحدَّد في [ ] مفكوك الآتية.

(أ) $(٢س - ص)^{٨}$ [$س^{٤}ص^{٤}$]

(ب) $(٣أ + ب)^{٤}$ [$أب^{٣}$]

(ج) $(س - ٤ص)^{٥}$ [$س^{٣}ص^{٢}$]

(د) $(٣س + ١)^{٥}$ [$س^{٤}$]

(هـ) $(٢أ - ٣)^{٤}$ [أ]

(و) $(٣س + ٢)^{٥}$ [$س^{٣}$]

(ز) $(٢س^{٢} - ١)^{٦}$ [$س^{٦}$]

(ح) $(٣س^{٢} - ١)^{٥}$ [$س^{٤}$]

(ط) $(٣س^{٢} + ٢)^{٦}$ [$س^{٦}$]

٢ أوجد مفكوك التعبيرات الآتية.

(أ) $(س + ١)^{٤}$

(ب) $(أ + ب)^{٤}$

(ج) $(أ - ٢ب)^{٤}$

(د) $(س - ٢)^{٥}$

(هـ) $(٣س + ٢ص)^{٥}$

(و) $(٢أ^{٢} - ١)^{٥}$

(ز) $(س - ٣)^{٦}$

(ح) $(٢س - ٣ص)^{٦}$

(ط) $\left(س + \frac{١}{٣}\right)^{٦}$

★ التحدّي — مجموع المعاملات

إذا كان $(١ + س)^{٥} = أ + بس + جس^{٢} + دس^{٣} + هـس^{٤} + وس^{٥}$، فأوجد القيمة العددية للمقدار $أ + ب + ج + د + هـ + و$.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢-١ نظرية متعددة الحدود

الرياضيات

الفصل الأول البراهين الجبرية

إذا أردت فَكّ مقدار مكوّن من ثلاثة حدود: $(س + ص + ع)^{٤}$، فكيف تُعيّن معامل الحدّ المحتوي على $س^{٢}ص ع$ دون إجراء عملية الضرب؟ وكيف أكتبه دون الحاجة إلى إزالة الأقواس؟

نواتج التعلّم

يُطبّق نظرية متعددة الحدود في إيجاد مفكوك المقادير الجبرية وفي تعيين معاملات حدود معيّنة.

لاحظ!

عند فَكّ أقواس $(أ + ب + ج)^{ن}$، الحدّ المحتوي على $أ^{ف}ب^{ق}ج^{ر}$ هو:

$$\frac{ن!}{ف!ق!ر!}أ^{ف}ب^{ق}ج^{ر}$$

استعد

أوجد معامل الحدّ $أ^{٤}ب^{٣}ج$ في مفكوك الآتية.

(أ) $(أ + ب + ج)^{٨}$

(ب) $(أ - ٢ب + ٣ج)^{٨}$

طريقة الحل

(أ) عند مفكوك $(أ + ب + ج)^{٨}$، الحدّ $أ^{٤}ب^{٣}ج$ هو

$$\frac{٨!}{٤!٣!١!}أ^{٤}ب^{٣}ج^{١} = ٢٨٠أ^{٤}ب^{٣}ج$$

إذن، المعامل المطلوب هو ٢٨٠

(ب) عند مفكوك $(أ - ٢ب + ٣ج)^{٨}$، الحدّ $أ^{٤}ب^{٣}ج$ هو

$$\frac{٨!}{٤!٣!١!}أ^{٤} \times (-٢ب)^{٣} \times (٣ج)^{١} = -٦٧٢٠أ^{٤}ب^{٣}ج$$

إذن، المعامل المطلوب هو -٦٧٢٠

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ المسألة ٢ ثم ناقِشوا الإجابة.

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معامل الحدود الآتية في مفكوك $(أ + ب + ج)^{٦}$.

(أ) $أ^{٣}ب^{٢}ج$

(ب) $أ^{٢}ب^{٢}ج^{٢}$

٢ أوجد معامل الحدود الآتية في مفكوك $(أ + ٣ب - ٢ج)^{٦}$.

(أ) $أ^{٢}ب^{٢}ج^{٢}$

(ب) $أب^{٢}ج^{٣}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معامل الحدود الآتية في مفكوك $(س + ص + ع)^{٧}$.

(أ) $س ص^{٥} ع$ (ب) $س^{٤} ص^{٢} ع$

(جـ) $س^{٢} ص^{٣} ع^{٢}$

٢ أوجد معامل الحدود الآتية في مفكوك $(س + ص + ع)^{٩}$.

(أ) $س^{٦} ص ع^{٢}$ (ب) $س^{٣} ص^{٣} ع^{٣}$

(جـ) $س^{٢} ص^{٤} ع^{٣}$

٣ أوجد معامل الحدود الآتية في مفكوك $(أ + ٢ب – ٣جـ)^{٧}$.

(أ) $أ^{٢} ب^{٣} جـ^{٢}$ (ب) $أ ب جـ^{٥}$

(جـ) $أ^{٢} ب^{٤} جـ$

٤ أوجد معامل الحدود الآتية في مفكوك $(٢أ – ب + ٣جـ)^{٨}$.

(أ) $أ^{٢} ب^{٢} جـ^{٤}$ (ب) $أ^{٤} ب جـ^{٣}$

(جـ) $أ^{٣} ب^{٣} جـ^{٢}$

★ التحدّي — أكبر معامل

أوجد أكبر معامل في مفكوك $(١ + س + س^{٢})$.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

١-٣ تطبيقات نظرية ذات الحدين

الرياضيات

الفصل الأول البراهين الجبرية

نواتج التعلّم

يوظّف نظرية ذات الحدين في التطبيقات الرياضية والحسابية.

لاحِظ!

في مسائل الإثبات باستخدام نظرية ذات الحدين، استخدم فَكّ أقواس $(١ + س)^{ن}$.

$$(١ + س)^{ن} = {}_{ن}ق_{.} + {}_{ن}ق_{١}س + {}_{ن}ق_{٢}س^{٢} + \cdots + {}_{ن}ق_{ن}س^{ن}$$

عوّض بقيمة مناسبة لـ س للحصول على المتكافئة المطلوبة.

استعد

أثبت أن المتكافئة الآتية صحيحة.

$${}_{ن}ق_{.} + {}_{ن}ق_{١} + {}_{ن}ق_{٢} + \cdots + {}_{ن}ق_{ن} = ٢^{ن}$$

طريقة الحل

[البرهان]

بفَكّ أقواس $(١ + س)^{ن}$ باستخدام نظرية ذات الحدين:

$$(١ + س)^{ن} = {}_{ن}ق_{.} + {}_{ن}ق_{١}س + {}_{ن}ق_{٢}س^{٢} + \cdots + {}_{ن}ق_{ن}س^{ن}$$

عوّض بـ س = ١ لتحصل على $(١ + س)^{ن} = ٢^{ن}$

بالتعويض بـ س = ١ في هذا التعبير،

$${}_{ن}ق_{.} + {}_{ن}ق_{١} \times ١^{١} + {}_{ن}ق_{٢} \times ١^{٢} + \cdots + {}_{ن}ق_{ن} \times ١^{ن} = ٢^{ن}$$

$${}_{ن}ق_{.} + {}_{ن}ق_{١} + {}_{ن}ق_{٢} + \cdots + {}_{ن}ق_{ن} = ٢^{ن}$$

إذن، المتكافئة المعطاة صحيحة.

حاول

أثبت أن المتكافئة الآتية صحيحة.

$${}_{ن}ق_{.} - {}_{ن}ق_{١} + {}_{ن}ق_{٢} - \cdots + (-١)^{ن}{}_{ن}ق_{ن} = ٠$$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدريب

أثبت أن المتكافئات الآتية صحيحة.

١ $ق_{ن.} + ٢ق_{ن١} + ٢^{٢}ق_{ن٢} + \cdots + ٢^{ن}ق_{نن} = ٣^{ن}$

٢ $ق_{ن.} - ٢ق_{ن١} + ٢^{٢}ق_{ن٢} - \cdots + (-٢)^{ن}ق_{نن} = (-١)^{ن}$

٣ $ق_{ن.} - \frac{ق_{ن١}}{٢} + \frac{ق_{ن٢}}{٢^{٢}} - \cdots + (-١)^{ن}\frac{ق_{نن}}{٢^{ن}} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن}$

★ التحدّي — قابلية القسمة

باستخدام نظرية ذات الحدين: أثبت أن $(٨^{ن} - ١)$ يقبل القسمة على ٧ (ن عدد صحيح موجب).

تأمّل

قارن بين مفكوك ذات الحدين ومفكوك متعددة الحدود. من أي النواحي يتشابهان؟ وكيف يساعدك اعتبار ذات الحدين حالة خاصة من متعددة الحدود على توحيد فهمك للقوى الجبرية وطرائق العدّ التوافيقية؟

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٤-١
الرياضيات

قسمة كثيرات الحدود

الفصل الأول البراهين الجبرية

المفهوم ٢ · قسمة كثيرات الحدود

تخيّل أنك تدير تطبيقًا ذكيًّا لتوصيل الطعام. ستلاحظ أن عدد الطلبات اليومية يتزايد بمعدل متسارع غير خطي كلما ازداد إقبال الناس على التطبيق. وفي الوقت نفسه يضمّ التطبيق مندوبي توصيل جددًا بمعدل أسبوعي ثابت، أي بمعدل خطي. ولمعرفة متوسط عبء العمل – أي عدد الطلبات التي يغطيها مندوب واحد بمرور الوقت – تُقسَّم دالة إجمالي الطلبات الكبيرة على دالة عدد المندوبين.

وهنا تحديدًا يأتي دور قسمة كثيرات الحدود. فهي الأداة الرياضية التي نلجأ إليها حين نريد تفكيك نظام كبير مركّب سريع النمو، وتوزيع حمله على وحدات أصغر، لنحدّد نصيب الجزء الواحد أو كفاءته بدقة.

السؤال الموجّه: كيف تساعدنا قسمة المقادير الجبرية المركّبة على تبسيط كميات هائلة من البيانات، وعلى فهم نصيب الوحدة الواحدة داخل نظام دائم النمو؟

لاحظ!

يمكن حساب قسمة كثيرات الحدود باستخدام القسمة الطويلة، على غرار الأعداد الصحيحة.

في المسائل التي يُطلب فيها اعتبارها كثير حدود في س، **تُعامَل المتغيرات الأخرى كثوابت**.

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الناتج والباقي عند قسمة $٢س^{٣} - ٥س^{٢} - ٢$ على $٢س^{٢} - س - ١$.

٢ لكثيرتي الحدود $م = ٤س^{٢} - ٩أس - ٩أ^{٢}$، $ن = س - ٣أ$، باعتبار كلًّا منهما كثير حدود في س، أوجد الناتج والباقي عند قسمة م على ن.

طريقة الحل

١

$$\begin{array}{r|l} ٢س^{٢} - س - ١ & س - ٢ \\ \hline ٢س^{٣} - ٥س^{٢} & - ٢ \\ \hline ٢س^{٣} - س^{٢} - س & \\ \hline -٤س^{٢} + س - ٢ & \\ -٤س^{٢} + ٢س + ٢ & \\ \hline -س - ٤ & \end{array}$$

إذن، **الناتج هو** س – ٢ **والباقي هو** –س – ٤

إذا كان حدّ ذو درجة معيّنة مفقودًا في المقسوم، اترك ذلك المكان فارغًا.

اطرح $(٢س^{٢} - س - ١) \times س$ للتخلص من $٢س^{٣}$.

اطرح $(٢س^{٢} - س - ١) \times (-٢)$ للتخلص من $-٤س^{٢}$.

هو الباقي عندما تصبح الدرجة أقل من درجة المقسوم عليه.

نواتج التعلّم

يجري قسمة كثيرات الحدود باستخدام الخوارزمية المعتادة.

أخطاء شائعة

الخطأ في الطرح: كثيرًا ما يقع الخطأ عند الطرح بعد الضرب، وبخاصة نسيان تغيير الإشارات أو جمع الحدود المتشابهة على الوجه الصحيح. الضرب الجزئي: الضرب في الحدّ الرئيسي للمقسوم عليه وحده بدلًا من المقسوم عليه كلّه.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢ بما أننا نعتبرها كثير حدود في س، نُعامَل المتغيرات الأخرى غير س كأعداد.

$$\begin{array}{r|l} \text{س} - ٣\text{أ} & ٤\text{س} + ٣\text{أ} \\ & ٤\text{س}^{٢} - ٩\text{أس} - ٩\text{أ}^{٢} \\ \hline & ٤\text{س}^{٢} - ١٢\text{أس} \\ \hline & ٣\text{أس} - ٩\text{أ}^{٢} \\ & ٣\text{أس} - ٩\text{أ}^{٢} \\ \hline & ٠ \end{array}$$

إذن، **الناتج هو** ٤س + ٣أ **والباقي هو** ٠

حاول

أوجد الناتج والباقي عند قسمة كثير الحدود م على كثير الحدود ن. (في ٢، احسب باعتبارها كثيرة حدود في س).

١ م = ٢س^{٣} – ١٣س + ١، ن = س^{٢} + ٢س – ٣

٢ م = س^{٣} – ٣أس^{٢} + ٥أ^{٢}س – ٥أ^{٣}، ن = س – ٢أ

تدريب

أوجد الناتج والباقي عند قسمة كثير الحدود م على كثير الحدود ن. (في ٧-١٠، احسب باعتبارها كثير حدود في س).

١ م = س^{٢} – ٥س + ١، ن = س – ٢

٢ م = س^{٣} – ٤س + ١، ن = س – ٣

٣ م = ٢س^{٣} – ٣س^{٢} + ٣س + ٤، ن = س^{٢} – ٢س + ٣

٤ م = ٦س^{٣} – ٨س^{٢} + ٥، ن = ٢س^{٢} – ٢س – ٥

٥ م = س^{٣} – ٧س + ٦، ن = س^{٢} + ٢س – ٣

٦ م = ٣س^{٤} – ٥س^{٣} + س – ١، ن = –س^{٢} + ٣س + ٢

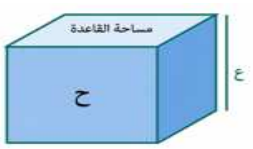
٧ م = ٤س^{٢} – ٥أس – ٦أ^{٢}، ن = س – ٢أ

٨ م = س^{٣} + أس^{٢} + أ^{٢}س – أ^{٣}، ن = س + ٢أ

٩ م = س^{٣} – ٢أس^{٢} + ٣أ^{٣}، ن = س + أ

١٠ م = س^{٣} + ٣س^{٢}ص – ٢ص^{٣}، ن = س + ص

★ التحدّي — إيجاد الارتفاع



صندوق على شكل متوازي مستطيلات حجمه ٤س^{٣} + ٤س^{٢} – ٩س – ٩. إذا كانت مساحة قاعدته ٢س^{٢} – س – ٣، فاكتب ارتفاعه بدلالة س.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

١-٥ ناتج القسمة والباقي لكثيرات الحدود

الرياضيات

الفصل الأول البراهين الجبرية

لاحظ!

إذا قُسم كثير الحدود م على كثير الحدود ن، وكان الناتج خ والباقي ر، فإنّ المتكافئة الآتية صحيحة:

م = ن × خ + ر

مثال: عند قسمة ٧ على ٣، يكون الناتج ٢ والباقي ١.

٧ = ٣ × ٢ + ١

في المسائل التي يُعطى فيها الناتج والباقي، عوّض بالتعبيرات المعلومة في م = نخ + ر.

استعد

أوجد كثيرتي الحدود م ون اللتين تحقّقان الشروط الآتية.

١ عند قسمة م على س^{٢} – ٢س – ١، يكون الناتج س + ٣ والباقي –٢س + ٥.

٢ عند قسمة ٤س^{٣} + ٨س – ٩ على ن، يكون الناتج ٢س – ٣ والباقي س + ١٥.

طريقة الحل

بما أنّ الناتج والباقي معلومان، عوّض بالتعبيرات المعلومة في م = نخ + ر.

١ م = (س^{٢} – ٢س – ١)(س + ٣) + (–٢س + ٥)

= س^{٣} + ٣س^{٢} – ٢س^{٢} – ٦س – س – ٣ – ٢س + ٥

= س^{٣} + س^{٢} – ٩س + ٢

٢ ٤س^{٣} + ٨س – ٩ = ن × (٢س – ٣) + (س + ١٥)

ن × (٢س – ٣) + (س + ١٥) = ٤س^{٣} + ٨س – ٩

ن × (٢س – ٣) = ٤س^{٣} + ٧س – ٢٤

ن = (٤س^{٣} + ٧س – ٢٤) ÷ (٢س – ٣)

أوجد ن

٢س – ٣	٢س^{٢} + ٣س + ٨
	٤س^{٣} + ٧س – ٢٤
	٤س^{٣} – ٦س^{٢}
	٦س^{٢} + ٧س
	٦س^{٢} – ٩س
	١٦س – ٢٤
	١٦س – ٢٤
	٠

يجب أن يكون الباقي ٠

= ٢س^{٢} + ٣س + ٨

نواتج التعلّم

يميّز بين ناتج القسمة والباقي في قسمة كثيرات الحدود، ويستنتج أن درجة الباقي أقلّ من درجة المقسوم عليه، ويستخدم ذلك في التحقق من صحة القسمة.

أخطاء شائعة

التوقّف مبكرًا: إنهاء القسمة قبل أن تصير درجة الباقي أقلّ من درجة المقسوم عليه. الخلط بين الناتج والباقي: الظنّ بأن الباقي لا بدّ أن يكون صفرًا دائمًا، مع أنه قد يكون حدًّا (أو أكثر) درجته أقلّ من درجة المقسوم عليه.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاول

أوجد كثيرتي الحدود م ون اللتين تحقّقان الشروط الآتية.

١ عند قسمة م على ٢س^{٢} + س + ١، يكون الناتج ٣س + ٢ والباقي –٢س + ٦.

٢ عند قسمة س^{٣} – س^{٢} + ٣س + ١ على ن، يكون الناتج س^{٢} – ٢س + ٥ والباقي –٤.

تدريب

أوجد كثيري الحدود م ون اللتين تحقّقان الشروط الآتية.

١ عند قسمة م على س^{٢} – ٢س – ١، يكون الناتج ٢س – ٣ والباقي –٢س.

٢ عند قسمة م على س^{٢} – ٣س + ٢، يكون الناتج ٢س + ٦ والباقي ٢س – ٣.

٣ عند قسمة م على ٢س^{٢} – س + ٢، يكون الناتج ٢س – ١ والباقي ٢.

٤ عند قسمة ٢س^{٣} + س^{٢} – ٣س + ٥ على ن، يكون الناتج س + ١ والباقي –٥س + ٢.

٥ عند قسمة ٦س^{٣} + ١١س^{٢} – ٢ على ن، يكون الناتج ٢س^{٢} + ٣س – ١ والباقي –١.

٦ عند قسمة ٢س^{٣} + ٤س^{٢} + ٧ على ن، يكون الناتج س + ٢ والباقي ٣س + ١٣.

★ التحدّي — استرجاع المقسوم عليه

عند قسمة س^{٤} + س^{٢} + ٣س – ١ على ن، يكون الناتج س^{٢} + س + ١ والباقي ٣س – ٢، فأوجد كثير الحدود ن.

تأمّل

عند قسمة كثير حدود على آخر، لماذا يجب أن تكون درجة الباقي دائمًا أقلّ من درجة المقسوم عليه؟ وكيف يساعدنا هذا الشرط على التحقق من صحة خطوات القسمة وفهم العلاقة بين الناتج والباقي؟

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ المسألة ٢ ثم ناقِشوا الإجابة.

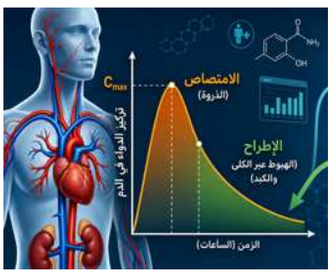
موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

١-٦
الرياضيات

ضرب وقسمة التعبيرات النسبية

الفصل الأول البراهين الجبرية

المفهوم ٣ · التعبيرات النسبية



حين يتناول مريض دواءً موصوفًا، يتغيّر تركيز الدواء في دمه تغيّرًا سريعًا مع مرور الوقت. ويتتبّع الباحثون الطبّيون هذا التركيز بالرياضيات. فمع امتصاص الجسم للدواء يقفز مقداره في الدم قفزةً حادّة، ومع ترشيح الكليتين والكبد له يهبط التركيز.

ولنمذجة دورة الحياة هذه بدقّة يستعمل العلماء التعبيرات النسبية، وهي كسور بسطها ومقامها تعبيرات جبرية. وحين يحتاج الأطباء إلى الجمع بين علاجات، أو تغيير الجرعات، أو حساب سرعة خروج دوائين مختلفين من جسم المريض في الوقت نفسه، فلا بدّ لهم من إجراء العمليات الحسابية الأربع (الجمع والطرح والضرب والقسمة) على هذه الكسور الجبرية.

السؤال الموجِّه: كيف تتيح لنا القوانين الأساسية للحساب دمجَ الكسور الجبرية المتغيّرة المركّبة وتبسيطَها للتنبّؤ بالنتائج في الطبّ وعلوم الحياة؟

نواتج التعلّم

يبسّط التعبيرات الكسرية (النسبية) بالضرب والقسمة.

لاحِظ!

- قسمة كلٍّ من بسط تعبير نسبي ومقامه على **عاملهما المشترك** تُسمّى **الاختصار**.
- التعبير النسبي الذي لا يمكن اختصاره أكثر من ذلك يُسمّى **تعبيرًا نسبيًّا غير قابل للاختصار**.
- **مثال:** اختصار $\frac{(س - ١)(س - ٣)}{س(س - ٣)}$ يعطي $\frac{(س - ١)\cancel{(س - ٣)}}{س\cancel{(س - ٣)}} = \frac{س - ١}{س}$
- عند وجود كثيرات حدود في بسط تعبير نسبي أو مقامه، **حلّلها إلى عوامل** أولًا للتحقّق ممّا إذا كان يمكن اختصارها.

تعبير نسبي غير قابل للاختصار إذ لا يمكن تبسيطه أكثر من ذلك.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ بسّط التعبيرات النسبية الآتية.

(أ) $\frac{١٢أب^{٥}}{٩أ^{٣}ب^{٢}}$

(ب) $\frac{س^{٢} - ٤}{٣س^{٢} + ٧س + ٢}$

٢ احسب ما يأتي.

$$\frac{س^{٢} - ٤س - ٥}{٢س^{٢} + ٥س + ٢} \div \frac{س^{٢} - س - ٢٠}{٢س^{٢} - ٥س - ٣}$$

طريقة الحل

١

(أ) $\frac{١٢أب^{٥}}{٩أ^{٣}ب^{٢}} = \frac{٤ب^{٣}}{٣أ^{٢}}$

(ب) $\frac{س^{٢} - ٤}{٣س^{٢} + ٧س + ٢}$

$= \frac{(س + ٢)(س - ٢)}{(٣س + ١)(س + ٢)}$

$= \frac{س - ٢}{٣س + ١}$

٢ $\frac{س^{٢} - ٤س - ٥}{٢س^{٢} + ٥س + ٢} \div \frac{س^{٢} - س - ٢٠}{٢س^{٢} - ٥س - ٣}$

$= \frac{س^{٢} - ٤س - ٥}{٢س^{٢} + ٥س + ٢} \times \frac{٢س^{٢} - ٥س - ٣}{س^{٢} - س - ٢٠}$

$= \frac{(س + ١)(س - ٥)}{(٢س + ١)(س + ٢)} \times \frac{(٢س + ١)(س - ٣)}{(س - ٥)(س + ٤)}$

$= \frac{(س + ١)(س - ٣)}{(س + ٢)(س + ٤)}$

حلّل إلى عوامل.

اشطب العامل المشترك $(س + ٢)$.

حوّل القسمة إلى ضرب باستخدام مقلوب المقسوم عليه.

حلّل إلى عوامل.

اشطب العوامل المشتركة.

لا تفكّ الأقواس.

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ بسّط التعبيرات النسبية الآتية.

(أ) $\frac{٦س^{٢}ص^{٣}}{٢٠س^{٣}ص}$

(ب) $\frac{٢س^{٢} - ٣س - ٥}{س^{٢} + ٣س + ٢}$

٢ احسب ما يأتي.

(أ) $\frac{س^{٢} - ١١س + ٢٤}{س^{٢} - ٦س - ١٦} \times \frac{س^{٢} + ٢س}{س^{٢} - ٦س + ٩}$

(ب) $\frac{س^{٢} - ٩}{س^{٢} - س - ٢} \div \frac{٢س^{٢} + ٥س - ٣}{س + ١}$

أخطاء شائعة

كثيرًا ما يشطب الطلاب خطأً متغيّرات أو أعدادًا متماثلة في البسط والمقام، حتى حين تفصل بينها إشارات الجمع أو الطرح.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ المسألة ٢ ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ بسّط التعبيرات النسبية الآتية.

(أ) $\frac{٦أ^{٢}ب جـ^{٢}}{٨أب^{٤}جـ^{٢}}$

(ب) $\frac{٢أ^{٢}ب}{٨أ^{٣}ب^{٣}}$

(جـ) $\frac{س^{٢}+٣س}{س^{٢}-٩}$

(د) $\frac{س^{٢}+س-٢}{س^{٢}-٥س+٤}$

(هـ) $\frac{٢س^{٢}-٤سص+٢ص^{٢}}{س^{٣}+٣س^{٢}ص-٤سص^{٢}}$

(و) $\frac{س^{٣}-١}{س^{٢}+٢س-٣}$

٢ احسب ما يأتي.

(أ) $\frac{أ^{٣}ب^{٢}}{جـ^{٣}} \times \frac{٩جـ^{٣}}{أ^{٤}ب^{٢}}$

(ب) $\frac{٦ب جـ^{٣}}{٢أ^{٥}} \times \frac{١٠أ^{٤}}{٣ب^{٣}}$

(جـ) $\frac{٢سص}{٣أب} \div \frac{٨س^{٣}ص}{٩أ^{٢}ب^{٣}}$

(د) $\frac{س+١}{س^{٢}-٤} \times \frac{س^{٢}-٢س-٨}{س^{٢}+س}$

(هـ) $\frac{س^{٢}-٩}{س^{٢}-٢س} \times \frac{س^{٢}-٧س+١٠}{س^{٢}+س-١٢}$

(و) $\frac{س^{٢}+س-٦}{٢س^{٢}+س-٦} \times \frac{س^{٢}+٦س+٨}{٣س^{٢}-٥س-٢}$

(ز) $\frac{٢س^{٢}-س-١٠}{س^{٢}-٢س-٣} \div \frac{س^{٢}+س-٢}{س^{٢}-٦س+٩}$

(ح) $\frac{س^{٢}-٣س-١٠}{٢س^{٢}+٣س-٢} \div \frac{س^{٢}-٢س-١٥}{٦س-٣}$

(ط) $\frac{س^{٢}-ص^{٢}}{س^{٢}-٢سص+ص^{٢}} \div \frac{س^{٢}+سص}{س-ص}$

★ التحدّي — بسّط ثم أوجِد القيمة

إذا كان س = $\sqrt[٧]{١٢٣}$ ، فأوجِد قيمة $\frac{س^{٣}+٨}{س^{٢}-س-٦} \times \frac{س^{٢}-٦س+٩}{س^{٢}-٢س+٤} \div \frac{٢س-٦}{س^{٥}-١}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

١ - ٧
الرياضيات

جمع وطرح التعبيرات النسبية

الفصل الأول البراهين الجبرية

لاحظ!

جمع التعبيرات النسبية ذات المقامات المختلفة وطرحها

كما هو الحال في الكسور العددية، اضرب البسط والمقام في التعبير نفسه لإيجاد مقام مشترك قبل الحساب.

مثال: $\frac{١}{س+١} + \frac{١}{س-٢} = \frac{(س-٢)}{(س+١)(س-٢)} + \frac{(س+١)}{(س-٢)(س+١)}$

$= \frac{(س-٢)+(س+١)}{(س+١)(س-٢)}$

عند إيجاد مقام مشترك، **حلّل المقامات إلى عوامل** أولًا.

مثال: $\frac{٢}{س^٢-س-٢} + \frac{٣}{س^٢+٥س+٦} = \frac{٢}{(س+١)(س-٢)} + \frac{٣}{(س-٢)(س+٣)}$

$= \frac{٢(س-٣)}{(س+١)(س-٢)(س-٣)} + \frac{٣(س+١)}{(س-٢)(س-٣)(س+١)}$

$= \frac{٢(س-٣)+٣(س+١)}{(س+١)(س-٢)(س-٣)}$

بعد التوحيد على مقام مشترك، احسب البسط فقط، وتحقّق ممّا إذا كان يمكن **تحليله** و**اختصاره**.

نواتج التعلّم

يبسّط التعبيرات الكسرية (النسبية) بالجمع والطرح.

أخطاء شائعة

جمع البسوط والمقامات أو طرحها مباشرةً: كثيرًا ما يعامل الطلاب التعبيرات النسبية معاملة الأعداد الصحيحة العادية، فيجمعون البسوط معًا والمقامات معًا أو يطرحونها.

استعد

بسّط التعبيرات الآتية.

$\frac{س+٤}{س^٢-٢س} - \frac{٣}{س^٢-٣س+٢}$

طريقة الحل

$\frac{س+٤}{س^٢-٢س} - \frac{٣}{س^٢-٣س+٢}$ — أوّلًا، حلّل المقام إلى عوامل.

$= \frac{س+٤}{س(س-٢)} - \frac{٣}{(س-١)(س-٢)}$ — أوجِد مقامًا مشتركًا.

$= \frac{(س+٤)(س-١)-٣س}{س(س-١)(س-٢)}$ — احسب البسط فقط.

$= \frac{س^٢-٤}{س(س-١)(س-٢)}$ — حلّل البسط إلى عوامل.

$= \frac{(س-٢)(س+٢)}{س(س-١)(س-٢)}$ — اختصر الكسر دائمًا (اشطب العوامل المشتركة).

$= \frac{س+٢}{س(س-١)}$ — لا تفكّ أقواس المقام.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاول

بسّط التعبيرات الآتية.

١ $\frac{\text{س} - ١}{\text{س}^٢ + ٤\text{س} + ٣} + \frac{٢}{\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٦}$

٢ $\frac{\text{س}}{\text{س} - ١} - \frac{٢}{\text{س}^٢ - ١}$

تدريب

بسّط التعبيرات الآتية.

١ $\frac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س} + ١} + \frac{٣}{\text{س} + ١}$

٢ $\frac{٣}{\text{س}^٢ + \text{س}} - \frac{٣ - \text{س}}{\text{س}^٢ + \text{س}}$

٣ $\frac{\text{س} + ٢}{\text{س}} - \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} - ١}$

٤ $\frac{١}{\text{س} + ٢} + \frac{١}{٢ - \text{س}}$

٥ $\frac{٢}{\text{س} - ١} + \frac{٣}{\text{س}^٢ + ٥\text{س} - ٦}$

٦ $\frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ + \text{س}} + \frac{\text{س}}{\text{س}^٢ - ١}$

٧ $\frac{٤\text{س}}{\text{س}^٢ - ١} - \frac{\text{س} - ١}{\text{س}^٢ + \text{س}}$

٨ $\frac{١}{\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٦} + \frac{١}{\text{س}^٢ + ٧\text{س} + ١٢}$

٩ $\frac{\text{س} - ١}{\text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٢} - \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ + ٤\text{س} + ٣}$

١٠ $\frac{\text{س} + ٤}{\text{س}^٢ + ٢\text{س}} - \frac{\text{س} + ٥}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٢}$

١١ $\frac{\text{س} + ٨}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٢} - \frac{\text{س} + ٥}{\text{س}^٢ - ١}$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ المسألة ٢ ثم ناقِشوا الإجابة.

★ التحدّي — ترشيح المياه على مرحلتين

يتابع فريق من مهندسي البيئة منظومة ترشيح مياه ذات مرحلتين في خزّان أحد الأحياء تسحب المنظومة الملوّثات العضوية خلال مدّة قدرها س ساعة. المرحلة الأولى (المرشِّح الحيوي الأساسي): معدّل سحب الملوّثات الأساسي هو $\frac{\text{س}^٣ + ٨\text{س}}{\text{س}^٢ - \text{س} - ٢}$. المرحلة الثانية (مرشِّح الفحم الثانوي): يرتدّ قدر يسير من المياه فيقلّل معدّل التنقية، ويُنمذَج بالمقدار $\frac{٨}{\text{س} - ٢}$. ولتحديد كفاءة التنقية الصافية، اطرح معدّل الارتداد في المرحلة الثانية من معدّل السحب في المرحلة الأولى.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

١-٨
الرياضيات

الكسور المركّبة

الفصل الأول البراهين الجبرية

نواتج التعلّم

يبسّط الكسور المركّبة ويحوّلها إلى أبسط صورة.

لاحظ!

التعبيرات التي تحتوي على تعبيرات نسبية في المقام أو البسط، كالتعبير الموجود على اليسار، تُسمّى **كسورًا مركّبة**.

$$\frac{\frac{١}{س}-١}{\frac{١}{س}+١} \quad ، \quad \frac{١-\frac{١}{س}}{\frac{١}{س}+١}$$

عند حساب الكسور المركّبة، **اضرب البسط والمقام في التعبير نفسه**.

استعد

بسّط التعبيرات الآتية.

١ $\frac{١}{\frac{١}{س-١}-١}$

٢ $\frac{\frac{١}{١-س}+\frac{١}{١+س}}{\frac{١}{١-س}-\frac{١}{١+س}}$

طريقة الحل

١ $\frac{١}{\frac{١}{س-١}-١}$

$= \frac{١ \times (س-١)}{\left(١-\frac{١}{س-١}\right) \times (س-١)}$

$= \frac{س-١}{(س-١)-\frac{س-١}{س-١}}$

$= \frac{س-١}{(س-١)-١}$

$= \frac{س-١}{س-٢}$

اضرب البسط والمقام في س − ١.

٢ $\frac{\frac{١}{١-س}+\frac{١}{١+س}}{\frac{١}{١-س}-\frac{١}{١+س}}$

$= \frac{\left(\frac{١}{١-س}+\frac{١}{١+س}\right) \times (١-س)(١+س)}{\left(\frac{١}{١-س}-\frac{١}{١+س}\right) \times (١-س)(١+س)}$

$= \frac{(١+س)+(١-س)}{(١+س)-(١-س)}$

$= \frac{٢}{٢س}$

$= \frac{١}{س}$

اضرب البسط والمقام في (١ − س)(١ + س).

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاول

بسّط التعبيرات الآتية.

١ $\dfrac{١}{١ - \dfrac{١}{س + ١}}$

٢ $\dfrac{\dfrac{١}{س + ٢} + \dfrac{١}{س - ٢}}{\dfrac{١}{س + ٢} - \dfrac{١}{س - ٢}}$

٣ $\dfrac{١}{١ - \dfrac{١}{١ - \dfrac{١}{س}}}$

تدريب

بسّط التعبيرات الآتية.

١ $\dfrac{س - \dfrac{٢}{س - ١}}{\dfrac{س}{س - ١} - ٢}$

٢ $\dfrac{١ + \dfrac{س - ص}{س + ص}}{١ - \dfrac{س - ص}{س + ص}}$

٣ $\dfrac{\dfrac{١}{س + ص} + \dfrac{١}{س - ص}}{\dfrac{١}{س + ص} - \dfrac{١}{س - ص}}$

٤ $\dfrac{\dfrac{س + ١}{س - ١} - \dfrac{س - ١}{س + ١}}{\dfrac{س + ١}{س - ١} + \dfrac{س - ١}{س + ١}}$

٥ $\dfrac{١}{١ - \dfrac{١}{١ + \dfrac{١}{س}}}$

★ التحدّي — مضخّم الإشارة

في الاتصالات، حين تسري إشارة عبر سلسلة من عُقَد التقوية المتكرّرة، تضعف قوّتها تكراريًّا. ويُنمذِج مهندس شبكات كفاءةَ هـ(س) لمضخّم ثلاثيّ المراحل بالكسر المركّب الآتي:

$$هـ(س) = \dfrac{١}{١ + \dfrac{١}{١ + \dfrac{١}{١ + س}}}$$

حيث س > ٠ . حوّل هذا الكسر المركّب إلى تعبير نسبي واحد $\dfrac{أ(س)}{ب(س)}$.

تأمّل

تأمّل العبارة الرياضية الآتية: $\dfrac{س^٢ - ١٦}{س - ٤} = س + ٤$ هل هذه المعادلة متطابقة مطلقة لكلّ الأعداد الحقيقية س؟ وضّح السبب. وإذا مثّل طالب $ص = \dfrac{س^٢ - ١٦}{س - ٤} = س + ٤$ بيانيًّا على آلة حاسبة بيانية، فسيبدو التمثيل مطابقًا للمستقيم ص = س + ٤. فما السمة الدقيقة في التمثيل البياني التي تخفيها دقّة الشاشة المعتادة عند س = ٤؟

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ المسألة ٣ ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

١-٩
الرياضيات

المتطابقات

الفصل الأول البراهين الجبرية

نواتج التعلّم

يتعرّف المتطابقة الجبرية، ويميّزها من المعادلة.

المفهوم ٤ · المتطابقات والبراهين

إن سبق لك أن لبست سوار لياقة يرصد نبضات قلبك، أو رأيت شاشة رسم القلب الكهربي (ECG) في عمل درامي طبّي، فقد رأيت معالجة الإشارات المركّبة وهي تعمل. والإيقاعات الحيوية – كنبض قلب الإنسان أو التفريغ الكهربي للخلايا العصبية – إيقاعات دورية. وتتعقّب الأجهزة الطبية هذه الإيقاعات بمعادلات موجية مركّبة متراكبة.

ولو اضطُرّ منظّم ضربات القلب أو جهاز المراقبة الطبي إلى حساب هذه المعادلات الضخمة بصورتها الخام في كل جزء من الألف من الثانية، لنفدت بطارية الجهاز سريعًا، ولتعرّضت حياة المريض للخطر. ولمنع ذلك يضع مهندسو البرمجيات صيغًا مكافئة مبسّطة محلّ الصيغ الموجية الضخمة. وهذا الإحلال ممكن بفضل المتطابقات الرياضية؛ وهي قوانين قاطعة تبيّن أن مقدارين مختلفَي الشكل تمامًا يعطيان الناتج نفسه لكل قيمة. وإثبات المتطابقات ليس بحثًا عن قيمة متغيّر مجهول، بل هو برهان على أن مسارين رياضيين مختلفين متطابقان في جوهرهما.

السؤال الموجّه: كيف نتحقّق رياضيًّا من أن مقدارين مختلفين متساويان تطابقًا لكل قيم المجال؟ وكيف يحفظ العملُ على طرف واحد من المعادلة التكافؤَ البنائيَّ دون أن يغيّر الناتج؟

لاحظ!

المساواة التي **تصحّ لأي قيمة تُعوَّض** عن س تُسمّى **متطابقة** في س.

أس^{٢} + ب س + ج = أ$'$ س^{٢} + ب$'$ س + ج$'$ متطابقة في س.

⇔ أ = أ$'$ ، ب = ب$'$ ، ج = ج$'$

معاملات الحدود المتساوية
الدرجة متساوية في الطرفين.

عند حلّ مسائل المتطابقات في س، رتّب المقدار المعطى تنازليًّا حسب قوى س، ثم قارِن معاملات كل حدّ.

وفي المتطابقات التي تتضمّن تعبيرات نسبية، تخلّص من المقامات أولًا.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

استعد

أوجِد قيم الثوابت أ وب وج التي تجعل المعادلات الآتية متطابقات في س.

١ $س^{٢} + ٦ = أ(س + ١)^{٢} + ب(س + ١) + ج$

٢ $\frac{٣س + ١}{(س + ٢)(س - ٣)} = \frac{أ}{س + ٢} + \frac{ب}{س - ٣}$

طريقة الحل

١ $س^{٢} + ٦ = أ(س + ١)^{٢} + ب(س + ١) + ج$

$س^{٢} + ٦ = أس^{٢} + (٢أ + ب)س + (أ + ب + ج)$

إذن، ١ = أ، ٠ = ٢أ + ب، ٦ = أ + ب + ج

وبحلّ هذه المنظومة نحصل على أ = ١، ب = −٢، ج = ٧

٢ $\frac{٣س + ١}{(س + ٢)(س - ٣)} = \frac{أ}{س + ٢} + \frac{ب}{س - ٣}$

$٣س + ١ = أ(س - ٣) + ب(س + ٢)$

$٣س + ١ = (أ + ب)س + (-٣أ + ٢ب)$

إذن، ٣ = أ + ب، ١ = −٣أ + ٢ب

وبحلّ هذه المنظومة نحصل على أ = ١ وب = ٢

رتّب الطرف الأيسر تنازليًّا حسب قوى س.

قارِن معاملات الحدود المتساوية الدرجة.

• إذا لم يوجد حدّ في س فاعتبر معامله صفرًا
• حلّ المعادلات الآنية في أ وب وج .

اضرب الطرفين في (س + ٢)(س − ٣) للتخلّص من المقامات.

رتّب الطرف الأيسر تنازليًّا حسب قوى س.

حاول

أوجِد قيم الثوابت أ وب وج التي تجعل المعادلات الآتية متطابقات في س.

١ $س^{٢} - س - ٣ = أ(س - ١)^{٢} + ب(س - ١) + ج$

٢ $\frac{١}{(٢س - ١)(س + ١)} = \frac{أ}{٢س - ١} + \frac{ب}{س + ١}$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدريب

أوجِد قيم الثوابت أ وب وج التي تجعل المعادلات الآتية متطابقات في س.

١ أ(س + ١) − ب(س + ٥) = ٨س

٢ (س + أ)(ب + ٣) = ٤س + ١٢

٣ ٢س^{٢} + ٥س + ٤ = (س + ١)(أس + ب) + ج

٤ (أس + ب)(س + ١) = ٤س^{٢} + جس + ١

٥ ٢س^{٢} − ٧س + ٨ = (س − ٣)(أس + ب) + ج

٦ $\frac{أ}{س-١} + \frac{ب}{س-٥} = \frac{٥س-١}{(س-١)(س-٥)}$

٧ $\frac{س+٨}{(س-٢)(س+٣)} = \frac{أ}{س-٢} + \frac{ب}{س+٣}$

٨ $\frac{٣س-٨}{٣س^{٢}+٥س-٢} = \frac{أ}{س+٢} + \frac{ب}{٣س-١}$

★ التحدّي — الكسور الجزئية

تدرس عالِمةُ سموم بيئية كيفية زوال مركّب عضوي معيّن من نظام ترشيح مائي. كفاءة معدّل الإزالة هـ(ن) تعتمد على الزمن ن (بالساعات، ن > ٠) وتُنمذَج بالعلاقة

$$هـ(ن) = \frac{٢٢ن + ١٥}{٨ن^{٢} + ١٠ن + ٣}$$

فُكَّها إلى كسرين جزئيين $\frac{أ}{٢ن+١} + \frac{ب}{٤ن+٣}$، ثم أوجِد أ وب.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

١-١٠
الرياضيات

إثبات المتطابقات (١)

الفصل الأول البراهين الجبرية

لاحظ!

لإثبات المتطابقة «الطرف الأيمن = الطرف الأيسر»، بسّط كلًّا من الطرف الأيمن والطرف الأيسر على حدة حتى يصبحا نفس التعبير.

نواتج التعلّم

يثبت صحة المساواة والمتطابقات الجبرية في الحالات العادية (دون أي شروط مسبقة).

استعد

أثبِت المتطابقات الآتية.

١ $(س + ص)^{٢} - (س - ص)^{٢} = ٤س ص$

٢ $(أ^{٢} + ب^{٢})(ج^{٢} + د^{٢}) = (أج - ب د)^{٢} + (أد + ب ج)^{٢}$

طريقة الحل

١ احسب وبسّط الطرف الأيمن للحصول على نفس تعبير الطرف الأيسر.

[البرهان]

الطرف الأيمن $= (س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢}) - (س^{٢} - ٢س ص + ص^{٢})$ ← ابدأ بالطرف الأيمن

$= س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢} - س^{٢} + ٢س ص - ص^{٢}$

$= ٤س ص$ ← التعبير نفسه الموجود في الطرف الأيسر

إذن، $(س + ص)^{٢} - (س - ص)^{٢} = ٤س ص$

٢ احسب وبسّط الطرف الأيمن والطرف الأيسر كلًّا على حدة للحصول على التعبير نفسه.

[البرهان]

الطرف الأيمن $= أ^{٢}ج^{٢} + أ^{٢}د^{٢} + ب^{٢}ج^{٢} + ب^{٢}د^{٢}$ ..... (١) ← ابدأ بالطرف الأيمن

الطرف الأيسر $= (أ^{٢}ج^{٢} - ٢أبجد + ب^{٢}د^{٢}) + (أ^{٢}د^{٢} + ٢أبجد + ب^{٢}ج^{٢})$

$= أ^{٢}ج^{٢} + ب^{٢}د^{٢} + أ^{٢}د^{٢} + ب^{٢}ج^{٢}$

$= أ^{٢}ج^{٢} + أ^{٢}د^{٢} + ب^{٢}ج^{٢} + ب^{٢}د^{٢}$ ..... (٢) ← أعِد ترتيب الحدود لتطابق (١)

من (١) و(٢)، $(أ^{٢} + ب^{٢})(ج^{٢} + د^{٢}) = (أج - ب د)^{٢} + (أد + ب ج)^{٢}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاول

أثبِت المتطابقات الآتية.

١ $(س + ص)^{٢} + (س - ص)^{٢} = ٢س^{٢} + ٢ص^{٢}$

٢ $(أ^{٢} - ب^{٢})(ج^{٢} - د^{٢}) = (أج - بد)^{٢} - (أد - بج)^{٢}$

تدريب

أثبِت المتطابقات الآتية.

١ $(س^{٢} + س + ١)(س^{٢} - س + ١) = س^{٤} + س^{٢} + ١$

٢ $(أ + ب)^{٣} - ٣أب(أ + ب) = أ^{٣} + ب^{٣}$

٣ $(أ + ب + ج)(أ^{٢} + ب^{٢} + ج^{٢} - أب - بج - جأ) = أ^{٣} + ب^{٣} + ج^{٣} - ٣أبج$

٤ $(أ + ٢ب)^{٢} - ٤أب = (أ - ٢ب)^{٢} + ٤أب$

٥ $(س^{٢} + ١)(ص^{٢} + ١) = (سص + ١)^{٢} + (س - ص)^{٢}$

٦ $(٢أ + ب)^{٢} - (أ + ٢ب)^{٢} = ٣(أ^{٢} - ب^{٢})$

★ التحدّي

أثبِت أنّ: $(أ^{٢} - أب + ب^{٢})(أ^{٢} + أب + ب^{٢}) = (أ^{٢} + ب^{٢})^{٢} - (أب)^{٢}$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

١ - ١١
الرياضيات

إثبات المتطابقات (٢)

الفصل الأول البراهين الجبرية

لاحِظ!

في إثبات المتطابقات الشرطية، **عبّر عن متغيّر واحد من المعادلة الشرطية بدلالة المتغيّرات الأخرى** وعوّض به للتخلّص من ذلك المتغيّر.

مثال: إذا كان س + ص = ١، فعوّض بـ ص = ١ – س للتخلّص من ص.

نواتج التعلّم

يثبت صحة المساواة والمتطابقات الجبرية في الحالات الشرطية.

استعد

إذا كان أ + ب + ج = ٠، فأثبِت المتطابقة الآتية.

$أ^{٢} + ب^{٢} + ج^{٢} = -٢(أب + ب ج + ج أ)$

طريقة الحل

[البرهان]

عبّر عن متغيّر واحد في المعادلة الشرطية بدلالة المتغيّرات الأخرى

من أ + ب + ج = ٠، ج = –أ – ب ..... (١)

عوّض بـ (١) للتخلّص من ج

بالتعويض بـ (١) في الطرف الأيمن،

الطرف الأيمن $= أ^{٢} + ب^{٢} + (-أ - ب)^{٢}$

$= أ^{٢} + ب^{٢} + أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}$

$= ٢أ^{٢} + ٢أب + ٢ب^{٢}$ ..... (٢)

بالتعويض بـ (١) في الطرف الأيسر،

الطرف الأيسر $= -٢\{أب + ب(-أ - ب) + (-أ - ب)أ\}$

$= -٢(أب - أب - ب^{٢} - أ^{٢} - أب)$

$= -٢(-أ^{٢} - أب - ب^{٢})$

$= ٢أ^{٢} + ٢أب + ٢ب^{٢}$ ..... (٣)

من (٢) و(٣)، $أ^{٢} + ب^{٢} + ج^{٢} = -٢(أب + ب ج + ج أ)$

حاول

أثبِت المتطابقات الآتية.

١ إذا كان س + ص = ١، فإنّ $س^{٢} + ص^{٢} + ١ = ٢(س + ص - س ص)$

٢ إذا كان أ + ب + ج = ٠، فإنّ $أ^{٣} + ب^{٣} + ج^{٣} = ٣أ ب ج$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدريب

أثبِت المتطابقات الآتية.

١ إذا كان س + ص = ١، فإنّ س^{٢} + ص^{٢} = ١ – ٢س ص

٢ إذا كان س – ص = ١، فإنّ س^{٢} + ص^{٢} = ٢س ص + ١

٣ إذا كان س + ص = ١، فإنّ س^{٢} – س = ص^{٢} – ص

٤ إذا كان أ + ب + ج = ٠، فإنّ أ^{٢} + جأ = ب^{٢} + بج

٥ إذا كان أ + ب + ج = ٠، فإنّ (أ + ب)(ب + ج)(ج + أ) + أبج = ٠

★ التحدّي — مجموع ثابت

ثلاثة أعداد غير صفرية أ ، ب ، ج تحقّق أ + ب + ج = ٠. أثبِت أنّه أيًّا كانت هذه الأعداد، فإنّ المجموع الآتي يساوي –٣ بالضبط دائمًا:

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب} + \text{ج}} + \frac{\text{ب}}{\text{ج} + \text{أ}} + \frac{\text{ج}}{\text{أ} + \text{ب}} = -٣$$

تأمّل

لماذا يُعدّ الضربُ التبادلي أو إضافةُ حدود إلى الطرفين غيرَ صحيح رياضيًّا عند إثبات متطابقة؟ وكيف يضمن العملُ على طرف واحد فقط أن يبقى البرهان سليمًا منطقيًّا؟

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

١-١٢
الرياضيات

إثبات المتطابقات (٣)

الفصل الأول البراهين الجبرية

نواتج التعلّم

يثبت صحة المساواة والمتطابقات الجبرية في حالات التناسب.

لاحظ!

المعادلة التي تعبّر عن تساوي نسبتين أو قيم نسب، مثل $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ أو س : ص : ع = أ : ب : ج، تُسمّى **تناسبًا**.

في المسائل ذات الشرط $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$، ضع أولًا $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = ك$ وعبّر بـ أ = بك، ج = دك

وفي المسائل ذات الشرط س : ص : ع = أ : ب : ج، اجعل ك ثابتًا وعبّر بـ

س = أك، ص = بك، ع = جك

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$، فأثبِت أنّ $\frac{أب}{أ^٢ + ب^٢} = \frac{جد}{ج^٢ + د^٢}$

٢ إذا كان س : ص : ع = ٢ : ٣ : ٥، فأوجِد قيمة $\frac{٢سص + صع + ٣عس}{س^٢ + ص^٢ + ع^٢}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

طريقة الحل

١ [البرهان]

ليكن $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = ك$، إذن أ = بك، ج = دك ..... (١)

بالتعويض بـ (١) في الطرف الأيمن،

الطرف الأيمن $= \frac{بك \times ب}{(بك)^٢ + ب^٢}$

$= \frac{ب^٢ك}{ب^٢ك^٢ + ب^٢}$

$= \frac{ب^٢ك}{ب^٢(ك^٢ + ١)}$

$= \frac{ك}{ك^٢ + ١}$ ..... (٢)

بالتعويض بـ (١) في الطرف الأيسر،

الطرف الأيسر $= \frac{دك \times د}{(دك)^٢ + د^٢}$

$= \frac{د^٢ك}{د^٢ك^٢ + د^٢}$

$= \frac{د^٢ك}{د^٢(ك^٢ + ١)}$

$= \frac{ك}{ك^٢ + ١}$ ..... (٣)

من (٢) و(٣)، $\frac{أب}{أ^٢ + ب^٢} = \frac{جد}{ج^٢ + د^٢}$

٢ من س : ص : ع = ٢ : ٣ : ٥، وليكن ك ثابتًا،

س = ٢ك، ص = ٣ك، ع = ٥ك ..... (١)

من (١)، $\frac{٢س ص + ص ع + ٣ع س}{س^٢ + ص^٢ + ع^٢} = \frac{٢ \times ٢ك \times ٣ك + ٣ك \times ٥ك + ٣ \times ٥ك \times ٢ك}{(٢ك)^٢ + (٣ك)^٢ + (٥ك)^٢}$

$= \frac{٥٧ك^٢}{٣٨ك^٢}$

$= \frac{٥٧}{٣٨}$

$= \frac{٣}{٢}$

تخلّص من أ

حلّل وبسّط

تخلّص من ج

حلّل وبسّط

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$، فأثبِت أنّ $\frac{أب + جد}{أب - جد} = \frac{أ^٢ + ج^٢}{أ^٢ - ج^٢}$

٢ إذا كان $\frac{س}{أ} = \frac{ص}{ب} = \frac{ع}{ج}$، فأثبِت أنّ $\frac{س^٢ + ص^٢ + ع^٢}{أ^٢ + ب^٢ + ج^٢} = \frac{س ص + ص ع + ع س}{أب + ب ج + ج أ}$

٣ إذا كان أ : ب : ج = ٢ : ٣ : ٤، فأوجِد قيمة $\frac{أب + ب ج + ج أ}{أ^٢ + ب^٢ + ج^٢}$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$، فأثبِت أنّ $\frac{أ + ب}{أ - ب} = \frac{ج + د}{ج - د}$

٢ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$، فأثبِت أنّ $\frac{٣أ + ج}{٣ب + د} = \frac{٢أ - ج}{٢ب - د}$

٣ إذا كان $\frac{س}{أ} = \frac{ص}{ب}$، فأثبِت أنّ $\frac{أ^٢ + س^٢}{أ^٢ - س^٢} = \frac{ب^٢ + ص^٢}{ب^٢ - ص^٢}$

٤ إذا كان $\frac{س}{أ} = \frac{ص}{ب} = \frac{ع}{ج}$، فأثبِت أنّ $\frac{س + ص + ع}{أ + ب + ج} = \frac{س}{أ}$

٥ إذا كان $\frac{س}{أ} = \frac{ص}{ب} = \frac{ع}{ج}$، فأثبِت أنّ $\frac{س + ٢ص + ٣ع}{أ + ٢ب + ٣ج} = \frac{س + ص + ع}{أ + ب + ج}$

٦ إذا كان $\frac{س}{أ} = \frac{ص}{ب} = \frac{ع}{ج}$، فأثبِت أنّ $(أ^٢ + ب^٢ + ج^٢)(س^٢ + ص^٢ + ع^٢) = (أس + بص + جع)^٢$

٧ إذا كان أ : ب : ج = ٣ : ٥ : ٢، فأوجِد قيمة $\frac{أ^٢ + ب^٢ - ج^٢}{أ^٢ - ب^٢ + ج^٢}$

٨ إذا كان س : ص : ع = ٢ : −٣ : ٤، فأوجِد قيمة $\frac{س^٢ + ص^٢ + ع^٢}{سص + صع + عس}$

٩ إذا كان $\frac{س}{٧} = \frac{ص}{٣} \neq ٠$، فأوجِد قيمة $\frac{س^٢ + ٥ص^٢}{س^٢ + سص + ص^٢}$

★ التحدّي — ضبط محلول كيميائي

تخيّل أنك كيميائي أمامك وعاءان من محلول ملحي. الوعاء ١ فيه أ جرامًا من الملح في ب ملليترًا من الماء؛ والوعاء ٢ فيه جـ جرامًا في د ملليترًا. وللوعاءين التركيز نفسه تمامًا، أي $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$.

يدخل عليك المشرف ومعه اختباران لضبط الجودة عليك إجراؤهما:

الاختبار ١ (الكتلة الكلّية): أوجِد نسبة الكتلة الكلّية (ملح + ماء) إلى الماء النقي في كلا الوعاءين.

الاختبار ٢ (الفرق): أوجِد نسبة الكتلة الكلّية إلى صافي الفرق بين الماء والملح (ماء − ملح) في كلا الوعاءين.

أثبِت أنه إذا تساوى التركيزان الابتدائيان، فإنّ نسبة كتلتيهما المجمّعة إلى فرقهما المفصول تبقى متساوية تمامًا كذلك:

$$\frac{أ + ب}{أ - ب} = \frac{جـ + د}{جـ - د}$$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

١-١٣
الرياضيات

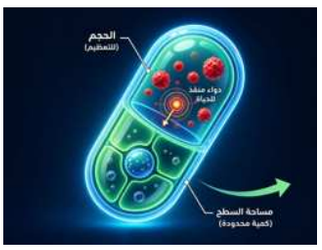
إثبات المتباينات (١)

الفصل الأول البراهين الجبرية

نواتج التعلّم

يثبت صحة المتباينات الجبرية في مواقف رياضية متنوّعة (الحالة الشرطية).

المفهوم ٥ · المتباينات



أنت مهندس حيوي تصمّم كبسولة قابلة للتحلّل الحيوي لتوصيل دواء منقذ للحياة إلى ورم بعينه داخل جسم الإنسان. ولضمان تحرّر الدواء بالمعدّل الأمثل، تحتاج إلى أن يكون حجم الكبسولة أكبر ما يمكن، لكنّك مقيَّد بحدٍّ صارم على كمّية البوليمر الخام الغالي المتاحة لصنع مساحة سطحها الخارجي.

فكيف تجد التصميم الأمثل على الإطلاق وأنت لا تستطيع استعمال معادلة مضبوطة تعطيك إجابة واحدة؟ تستعمل المتباينات.

فبينما تخبرنا المعادلات العادية متى تتساوى الأشياء بالضبط، تخبرنا المتباينات بالحدود المثلى لما هو ممكن فيزيائيًّا – القيم العظمى والصغرى المطلقة. وفي علوم الحياة والاقتصاد واللوجستيات، أقوى أداة لإيجاد هذه الحدود قانون رياضي عامّ بديع يُعرف بمتباينة المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي.

السؤال الموجّه: كيف يمكن استعمال الأساليب الجبرية والخصائص البنائية للأعداد الحقيقية الموجبة في تحديد حدود عليا وسفلى قاطعة للمقادير المتغيّرة؟ وكيف تظهر المساواة بوصفها حالة حدّية خاصة؟

لاحظ!

- لإثبات المتباينة الطرف الأيمن > الطرف الأيسر احسب فرقهما **الطرف الأيمن – الطرف الأيسر** وأثبِت أنه **موجب**. (الطرف الأيمن – الطرف الأيسر > ٠)
- إذا كان شرط مثل أ > ب معطى، أعد كتابته على الصورة أ – ب > ٠ لاستخدامه في إثباتك.

استعد

أثبِت المتباينات الآتية.

١ إذا كان أ > ب وس > ص، فأثبِت أنّ ٢(أس + بص) > (أ + ب)(س + ص)

٢ إذا كان س > ٣ وص > –٥، فأثبِت أنّ سص + ٥س > ٣ص + ١٥

طريقة الحل

١ [البرهان]

الطرف الأيمن – الطرف الأيسر = ٢(أس + بص) – (أ + ب)(س + ص)

ابدأ بكتابة «الطرف الأيمن – الطرف الأيسر =»

= ٢أس + ٢بص – أس – أص – بس – بص

حلّل المقدار. أخرِج العامل المشترك من الحدّين الأول والثاني.

= أس – أص – بس + بص

= أ(س – ص) – ب(س – ص)

= (أ – ب)(س – ص)

وبما أنّ أ > ب وس > ص، فإنّ أ – ب > ٠ وس – ص > ٠.

إذا كان أ > ٠ وب > ٠، فإنّ أب > ٠

(أ – ب)(س – ص) > ٠

إذن، ٢(أس + بص) > (أ + ب)(س + ص)

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

طريقة الحل

٢ [البرهان]

الطرف الأيمن – الطرف الأيسر = س ص + ٥ س – (٣ ص + ١٥)

= س ص + ٥ س – ٣ ص – ١٥

= س(ص + ٥) – ٣(ص + ٥)

= (س – ٣)(ص + ٥)

وبما أنّ س > ٣ وص > –٥، فإنّ س – ٣ > ٠ وص + ٥ > ٠

(س – ٣)(ص + ٥) > ٠

إذن، س ص + ٥ س > ٣ ص + ١٥

ابدأ بكتابة «الطرف الأيمن – الطرف الأيسر =»

حلّل المقدار: أخرِج العوامل المشتركة من الحدّين السابقين واللاحقين.

حاول

أثبِت المتباينات الآتية.

١ إذا كان أ > ب ، ج > د، فأثبِت أنّ أج + بد > أد + بج

٢ إذا كان س > ٢ ، ص > ١، فأثبِت أنّ س ص + ٢ > س + ٢ ص

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

تدريب

أثبِت المتباينات الآتية.

١ إذا كان س > ص، فأثبِت أنّ ٣ س – ٤ ص > ٢ س – ٣ ص

٢ إذا كان أ > ج ، ب > د، فأثبِت أنّ أب + جد > أد + بج

٣ إذا كان أ > ١ ، ب > ١، فأثبِت أنّ أب + ١ > أ + ب

٤ إذا كان أ > ب > س > ص، فأثبِت أنّ أس + بص > أص + بس

★ التحدّي — إعادة الترتيب

إذا كان أ > ب > ج > ٠ وس > ص > ع > ٠، فأثبِت أنّ

أس + بص + جع > أص + بع + جس

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

١-١٤
الرياضيات

إثبات المتباينات (٢)

الفصل الأول البراهين الجبرية

لاحظ!

- لإثبات أنّ الطرف الأيمن ≤ الطرف الأيسر، احسب فرقهما وأثبِت أنّ **الطرف الأيمن – الطرف الأيسر ≤ ٠**
- لإثبات متباينة لجميع الأعداد الحقيقية، استخدم **إكمال المربع** لتكوين س^{٢} أو س^{٢} + ص^{٢}
- للمتباينات التي تحتوي على ≥ أو ≤، يجب ذكر شرط تحقّق المتطابقة.

للأعداد الحقيقية س، ص: س^{٢} ≥ ٠ تتحقّق المتطابقة عندما س = ٠

س^{٢} + ص^{٢} ≥ ٠ تتحقّق المتطابقة عندما س = ٠، ص = ٠

نواتج التعلّم

يثبت صحة المتباينات الجبرية في مواقف رياضية متنوّعة (الحالة غير الشرطية).

استعد

أثبِت المتباينات الآتية. وحدِّد أيضًا متى تتحقّق المتطابقة.

١ أ^{٢} + ٤ب^{٢} ≥ ٤أب

٢ س^{٢} + ص^{٢} ≥ ٢(س – ص – ١)

طريقة الحل

١ [البرهان]

الطرف الأيمن – الطرف الأيسر = أ^{٢} + ٤ب^{٢} – ٤أب

= أ^{٢} – ٤أب + ٤ب^{٢} — ابدأ بكتابة «الطرف الأيمن – الطرف الأيسر»

= (أ – ٢ب)^{٢} – ٤ب^{٢} + ٤ب^{٢} — أكمِل المربع لتكوين س^{٢}

= (أ – ٢ب)^{٢} ≥ ٠ — س^{٢} ≥ ٠

إذن، أ^{٢} + ٤ب^{٢} ≥ ٤أب

وتتحقّق المتطابقة أيضًا عندما — تتحقّق المتطابقة عندما س = ٠

أ – ٢ب = ٠، أي عندما أ = ٢ب

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢ [البرهان]

الطرف الأيمن – الطرف الأيسر = س^{٢} + ص^{٢} – ٢(س – ص – ١)

= س^{٢} – ٢س + ص^{٢} + ٢ص + ٢

= (س – ١)^{٢} – ١ + (ص + ١)^{٢} – ١ + ٢

= (س – ١)^{٢} + (ص + ١)^{٢} ≥ ٠

إذن، س^{٢} + ص^{٢} ≥ ٢(س – ص – ١).

وتتحقّق المتطابقة أيضًا عندما

س – ١ = ٠ وص + ١ = ٠، أي عندما س = ١ وص = –١

ابدأ بكتابة «الطرف الأيمن – الطرف الأيسر»

أكمِل المربع لكلٍّ من س وص لتكوين س^{٢} + ص^{٢}

س^{٢} + ص^{٢} ≥ ٠

تتحقّق المتطابقة عندما س = ٠ وص = ٠

حاول

أثبِت المتباينات الآتية. وحدِّد أيضًا متى تتحقّق المتطابقة.

١ (أ^{٢} + ب^{٢})(س^{٢} + ص^{٢}) ≥ (أس + بص)^{٢}

٢ أ^{٢} + ٥ب^{٢} ≥ ٤أب

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

تدريب

أثبِت المتباينات الآتية. وحدِّد أيضًا متى تتحقّق المتطابقة، عدا السؤال الخامس

١ ٩س^{٢} ≥ ص(٦س – ص)

٢ ٢(س^{٢} + ص^{٢}) ≥ (س + ص)^{٢}

٣ (٢س – ص)^{٢} ≥ ٣(س^{٢} – ص^{٢})

٤ (٢أ + ٣ب)^{٢} ≥ ١٢أب

٥ س^{٢} + ٢ > ٢س

٦ س^{٢} + ص^{٢} – ٦س + ٨ص + ٢٥ ≥ ٠

★ التحدّي — لا يكون سالبًا أبدًا

أنت محلّل بيانات في مصنع ينتج مكوّنات دقيقة للطائرات المسيّرة باستعمال آلتين، س وص. وبسبب التآكل الميكانيكي وانحراف المعايرة وارتفاعات الطاقة المفاجئة، تُنمذَج التكلفة العامة اليومية بدلالة س ، ص بالعلاقة

التكلفة العامة = س^{٢} + ٢ص^{٢} – ١٠س + ١٢ص + ٤٣

أثبِت أنّه مهما كان س ، ص المختاران، فلن تكون التكلفة العامة للمصنع سالبة أبدًا.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

١-١٥
الرياضيات

إثبات المتباينات (٣)

الفصل الأول البراهين الجبرية

لاحظ!

! لإثبات المتباينات المحتوية على جذور، احسب فرق مربّعيهما، **(الطرف الأيمن)^{٢} – (الطرف الأيسر)^{٢}**

! استخدم الخصائص الآتية في الإثبات:

• عندما **الطرف الأيمن > ٠، الطرف الأيسر > ٠** : (الطرف الأيمن)^{٢} > (الطرف الأيسر)^{٢} ⇔ الطرف الأيمن > الطرف الأيسر

(الطرف الأيمن)^{٢} ≥ (الطرف الأيسر)^{٢} ⇔ الطرف الأيمن ≥ الطرف الأيسر

• عندما أ > ٠، $\sqrt[٢]{\text{أ}}$ ≥ ٠

نواتج التعلّم

يثبت صحة المتباينات الجبرية في مواقف رياضية متنوّعة (ومنها ما يتضمّن جذورًا).

استعد

أثبِت المتباينات الآتية. وحدِّد أيضًا متى تتحقّق المتطابقة في البند ا.

١ إذا كان أ > ٠ وب > ٠، فإنّ $\sqrt[٢]{\frac{\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}}{٢}} \geq \frac{\text{أ}+\text{ب}}{٢}$

٢ إذا كان أ > ٠ وب > ٠، فإنّ $\sqrt[٢]{\text{أ}} + ٤\sqrt[٢]{\text{ب}} < \sqrt[٢]{\text{أ}+١٦\text{ب}}$

طريقة الحل

١ [البرهان]

(الطرف الأيمن)^{٢} – (الطرف الأيسر)^{٢} $= \left(\sqrt[٢]{\frac{\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}}{٢}}\right)^{٢} - \left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{٢}\right)^{٢}$

احسب (الطرف الأيمن)^{٢} – (الطرف الأيسر)^{٢}

$= \frac{\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}}{٢} - \frac{\text{أ}^{٢}+٢\text{أب}+\text{ب}^{٢}}{٤}$

$= \frac{\text{أ}^{٢}-٢\text{أب}+\text{ب}^{٢}}{٤}$

$= \left(\frac{\text{أ}-\text{ب}}{٢}\right)^{٢} \geq ٠$

س^{٢} ≥ ٠

إذن، $\left(\sqrt[٢]{\frac{\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}}{٢}}\right)^{٢} \geq \left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{٢}\right)^{٢}$ ..... (١)

أثبتنا أنّ (الطرف الأيمن)^{٢} ≥ (الطرف الأيسر)^{٢}

وبما أنّ أ > ٠، ب > ٠، فإنّ $\sqrt[٢]{\frac{\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}}{٢}} > ٠$، $\frac{\text{أ}+\text{ب}}{٢} > ٠$ ..... (٢)

يجب إثبات أنّ الطرف الأيمن > ٠ والطرف الأيسر > ٠

من (١) و(٢)، $\sqrt[٢]{\frac{\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}}{٢}} \geq \frac{\text{أ}+\text{ب}}{٢}$

أثبتنا أنّ الطرف الأيمن ≥ الطرف الأيسر

وتتحقّق المتطابقة أيضًا عندما

$\frac{\text{أ}-\text{ب}}{٢} = ٠$، أي عندما أ = ب.

تتحقّق المتطابقة عندما س = ٠

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢ [البرهان]

(الطرف الأيمن)^{٢} − (الطرف الأيسر)^{٢} $= \left(\sqrt{أ} + ٤\sqrt{ب}\right)^{٢} - \left(\sqrt{أ + ١٦ب}\right)^{٢}$

احسب (الطرف الأيمن)^{٢} − (الطرف الأيسر)^{٢}

$= أ + ٨\sqrt{أب} + ١٦ب - (أ + ١٦ب)$

$= أ + ٨\sqrt{أب} + ١٦ب - أ - ١٦ب$

$= ٨\sqrt{أب} > ٠$

$\sqrt{أب} > ٠$

إذن، $\left(\sqrt{أ} + ٤\sqrt{ب}\right)^{٢} > \left(\sqrt{أ + ١٦ب}\right)^{٢}$ ..... (١)

يجب إثبات أنّ الطرف الأيمن > ٠ والطرف الأيسر > ٠

وبما أنّ أ > ٠، ب > ٠، فإنّ $\sqrt{أ} + ٤\sqrt{ب} > ٠$، $\sqrt{أ + ١٦ب} > ٠$ ..... (٢)

من (١) و(٢)، $\sqrt{أ} + ٤\sqrt{ب} > \sqrt{أ + ١٦ب}$

حاول

أثبِت المتباينات الآتية. وحدِّد أيضًا هل تتحقّق المتطابقة في البند ١.

١ إذا كان أ > ٠ وب > ٠، فإنّ $\sqrt{٢(أ + ب)} \leq \sqrt{أ} + \sqrt{ب}$

٢ إذا كان أ > ٠ وب > ٠، فإنّ $٢\sqrt{أ} + \sqrt{ب} > \sqrt{٤أ + ب}$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

تدريب

أثبِت المتباينات الآتية. وحدِّد أيضًا هل تتحقّق المتطابقة في البنود من ١ إلى ٣.

١ إذا كان أ > ٠، فإنّ $٢ + أ \leq \sqrt{٣ + ٦أ}$

٢ إذا كان أ > ٠ وب > ٠، فإنّ $\sqrt{٢(أ^{٢} + ب^{٢})} \leq أ + ب$

٣ إذا كان أ > ٠ وب > ٠، فإنّ $\sqrt{\frac{أ+ب}{٢}} \leq \frac{\sqrt{أ} + \sqrt{ب}}{٢}$

٤ إذا كان أ > ٠ وب > ٠، فإنّ $\sqrt{أ} + \sqrt{ب} > \sqrt{أ + ب}$

٥ إذا كان أ > ٠ وب > ٠، فإنّ $٢\sqrt{أ} + ٣\sqrt{ب} > \sqrt{٤أ + ٩ب}$

٦ إذا كان أ > ب > ٠، فإنّ $\sqrt{أ - ب} > \sqrt{أ} - \sqrt{ب}$

★ التحدّي — متباينة بجذور

إذا كان أ > ب، حيث أ وب عددان موجبان، فأثبِت أنّ $\sqrt{أ - ب} > \sqrt{أ} - \frac{ب}{٢\sqrt{أ}}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

١-١٦
الرياضيات

إثبات المتباينات (٤) (متباينة المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي)

الفصل الأول البراهين الجبرية

نواتج التعلّم

يطبّق متباينة المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي في إثبات المتباينات وإيجاد القيم العظمى.

لاحِظ!

- متباينة المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي

عندما $أ > ٠، ب > ٠$، $\frac{أ+ب}{٢} \geq \sqrt{أب}$، أو $أ + ب \geq ٢\sqrt{أب}$

تسري المتطابقة عندما $أ = ب$

- متباينة المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي مفيدة جدًّا عندما يُبسَّط حاصل ضرب الحدود إلى ثابت.

مثال: $أ + \frac{١}{أ} \Rightarrow أ \times \frac{١}{أ} = ١$

استعد

أثبِت المتباينات الآتية. وحدِّد أيضًا هل تتحقّق المتطابقة.

١ إذا كان $أ > ٠ ، ب > ٠$، فإنّ $\frac{ب}{أ} + \frac{أ}{ب} \geq ٢$

٢ إذا كان $أ > ٠ ، ب > ٠$، فإنّ $(أ + ب)\left(\frac{١}{أ} + \frac{١}{ب}\right) \geq ٤$

طريقة الحل

١ [البرهان]

بما أنّ $\frac{ب}{أ} > ٠، \frac{أ}{ب} > ٠$

اكتب هذا دائمًا

فبمتباينة المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي،

$\frac{ب}{أ} + \frac{أ}{ب} \geq ٢\sqrt{\frac{ب}{أ} \times \frac{أ}{ب}}$

$\frac{ب}{أ} + \frac{أ}{ب} \geq ٢$

إذن، $\frac{ب}{أ} + \frac{أ}{ب} \geq ٢$

وتتحقّق المتطابقة أيضًا

اضرب الطرفين في أب

عندما $\frac{ب}{أ} = \frac{أ}{ب}$

$ب^{٢} = أ^{٢}$

وبما أنّ $أ > ٠، ب > ٠$، فإنّ $أ = ب$

إذن، تتحقّق المتطابقة عندما $أ = ب$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢ [البرهان]

$(أ + ب)\left(\frac{١}{أ} + \frac{١}{ب}\right) = أ \times \frac{١}{أ} + \frac{أ}{ب} + \frac{ب}{أ} + ب \times \frac{١}{ب}$

$= \frac{أ}{ب} + \frac{ب}{أ} + ٢$ ..... (١)

بما أنّ $\frac{أ}{ب} > ٠$، $\frac{ب}{أ} > ٠$ ← اكتب هذا دائمًا

فبمتباينة المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي،

$\frac{أ}{ب} + \frac{ب}{أ} \geq ٢\sqrt{\frac{أ}{ب} \times \frac{ب}{أ}}$

$\frac{أ}{ب} + \frac{ب}{أ} \geq ٢$ ← أضِف ٢ إلى الطرفين لمطابقة (١)

$\frac{أ}{ب} + \frac{ب}{أ} + ٢ \geq ٤$ ← أثبتنا أنّ (المقدار (١)) ≥ ٤

إذن، $(أ + ب)\left(\frac{١}{أ} + \frac{١}{ب}\right) \geq ٤$

وتتحقّق المتطابقة أيضًا

عندما $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{أ}$ ← اضرب الطرفين في أب

$أ^{٢} = ب^{٢}$

وبما أنّ أ > ٠، ب > ٠، فإنّ أ = ب

إذن، تتحقّق المتطابقة عندما أ = ب

حاول

أثبِت المتباينات الآتية. وحدِّد أيضًا هل تتحقّق المتطابقة.

١ إذا كان أ > ٠ وب > ٠، فإنّ $\frac{ب^{٣}}{أ} + \frac{١٢أ}{ب} \geq ٤$

٢ إذا كان أ > ٠ وب > ٠، فإنّ $\left(أ + \frac{١}{ب}\right)\left(ب + \frac{٩}{أ}\right) \geq ١٦$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

تدريب

أثبِت المتباينات الآتية. وحدِّد أيضًا هل تتحقّق المتطابقة.

١ إذا كان أ > ٠، فإنّ $أ + \frac{٤}{أ} \geq ٤$

٢ إذا كان أ > ٠، ب > ٠ فإنّ $٣أب + \frac{٤}{أب} \geq ٤\sqrt[٣]{}$

٣ إذا كان أ > ٠، ب > ٠، فإنّ $أ + ب + \frac{٩}{أ + ب} \geq ٦$

٤ إذا كان س > ٠ فإنّ $\left(س + \frac{١}{س}\right)\left(س + \frac{٤}{س}\right) \geq ٩$

٥ إذا كان أ > ٠، ب > ٠ فإنّ $(أ + ٨ب)\left(\frac{٢}{أ} + \frac{١}{ب}\right) \geq ١٨$

٦ إذا كان أ > ٠، ب > ٠ فإنّ $\left(أ + \frac{٣}{ب}\right)\left(ب + \frac{٣}{أ}\right) \geq ١٢$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

★ التحدّي — المساحة العظمى

مستطيل محيطه ٢٠٠ سم. باستعمال العلاقة بين المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي، أثبِت أنّ مساحة المستطيل ≤ ٢٥٠٠ سم٢.

المحيط = ٢٠٠ سم

مكان الشكل: مستطيل طوله ل وعرضه و

تأمّل

أثبتنا في الدرس أنّ متباينة المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي $\left(\frac{أ+ب}{٢} \geq \sqrt{أب}\right)$ تصحّ دائمًا، بشرط أن يكون العددان غير سالبين (أ، ب ≥ ٠).

سؤال للتأمّل: ماذا يحدث لو حاولنا كسر هذا الشرط وطبّقنا المتباينة على أعداد سالبة؟ افترض أنّ أ = −٢ ، ب = −٨.

١. احسب المتوسط الحسابي لهما.

٢. حاوِل حساب المتوسط الهندسي لهما.

٣. هل تبقى إشارة المتباينة (≤) صحيحة وسارية؟

وضّح الانهيار الجبري والمنطقي الذي يحدث هنا، ولماذا يُعدّ تعريف «المجالات والقيود» في المتباينات أمرًا حيويًّا لمنع النماذج الطبية والهندسية من الانهيار في العالم الحقيقي.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

١-٢
الرياضيات

المتتابعات والحدود العامة

الفصل الثانى المتتابعات

نواتج التعلُّم

إيجاد الحدِّ العام للمتتابعة، واستنتاج بعض حدودها.

المفهوم ١ ٠ المتتابعات الحسابية

تخيَّل أنك مدرّب رياضى يضع برنامج تأهيل للاعب مصاب. تجعله يهرول ١٠ دقائق يوميًّا فى الأسبوع الأول، ثم تزيد المدّة ٣ دقائق بالضبط فى كل أسبوع لاحق (١٣ دقيقة، ثم ١٦، ثم ١٩ ...).

هذه الزيادة الخطّية الثابتة متتابعة حسابية فى صورة عملية. وفى الطبّ والأحياء تحكم هذه الأنماط الثابتة عمليات حاسمة، مثل معدّل تخليص الكبد للسموم فى الساعة، وكيفية انقسام الخلايا مع الزمن. وبدلًا من جمع البرنامج أسبوعًا بعد أسبوع، تعطيك قوانين المتتابعة الحسابية الإجابة الدقيقة فى الحال: مدّة تدريب المريض فى الأسبوع ٢٤، ومجموع زمن الجرى المتراكم خلال شهور.

السؤال الموجِّه: كيف ننمذج رياضيًّا معدّلات التغيّر الجمعى الثابتة، لتحديد حدود بعينها ومجاميع تراكمية كلّية فى المتتابعة؟

لاحِظ!

- قائمة من الأعداد مرتَّبة فى صفٍّ تُسمَّى **متتابعة**، ويُسمَّى كل عدد فى المتتابعة **حدًّا**.

  تُسمَّى حدود المتتابعة **الحدَّ الأول**، والحدَّ الثانى، والحدَّ الثالث، إلخ، بالترتيب من البداية. ويُسمَّى الحدُّ فى الموضع ن بـ الحدِّ رقم ن.

- للتعبير عن متتابعة بصورة عامة، نكتبها على النحو الآتى بإلحاق رقم الحدِّ بحرف واحد.

  أ١ ،أ٢ ،أ٣ ، ... ،أن ، ...

  أ١ هو الحدُّ الأول، أن هو الحدُّ رقم ن.

  يُرمز لهذه المتتابعة أيضًا بـ {أن}.

  مثال: {أن} : ٢، ٤، ٨، ١٦ ، ...

  أ١ = ٢، أ٢ = ٤، أ٣ = ٨، أ٤ = ١٦ ، ...

- عندما يُعبَّر عن أن بتعبير بدلالة ن، فإن تعويض ١، ٢، ٣ ، ... فى ن يعطى أ١ ،أ٢ ،أ٣ ، ...

  يُسمَّى مثل هذا التعبير بدلالة ن بـ **الحدِّ العام** للمتتابعة {أن}.

  مثال: أن = −٢ن + ٧

  −٢ن + ٧ هو حدّ عام.

  أ١ = −٢ × ١ + ٧ = ٥ أ٢ = −٢ × ٢ + ٧ = ٣ أ٣ = −٢ × ٣ + ٧ = ١

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

استعِدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان الحدُّ العام للمتتابعة {أن} معطًى بـ أن = $\frac{\text{ن}}{\text{ن}+١}$، فأوجد الحدَّ الأول حتى الحدِّ الثالث من هذه المتتابعة.

٢ استنتج الحدَّ العام للمتتابعات الآتية {أن}.

(أ) ٠، ١، ٤، ٩، ١٦، ... **(ب)** ٢، −٤، ٦، −٨، ١٠، ... **(ج)** ١، $\frac{٢}{٣}$، $\frac{٣}{٥}$، $\frac{٤}{٧}$، $\frac{٥}{٩}$، ...

طريقة الحلّ

١ عوّض ن = ١، ٢، ٣ فى أن = $\frac{\text{ن}}{\text{ن}+١}$

$\text{أ}_{١} = \frac{١}{١+١} = \frac{١}{٢}$ $\text{أ}_{٢} = \frac{٢}{٢+١} = \frac{٢}{٣}$ $\text{أ}_{٣} = \frac{٣}{٣+١} = \frac{٣}{٤}$

٢ أنشئ قانونًا بالنظر فى الانتظام.

(أ) بما أنها (رقم الحدِّ −١)^{٢}، فإن أن = (ن − ١)^{٢}

(ب) بالنسبة للمتتابعات ذات الإشارات المتناوبة، انظر فى انتظام جزء الإشارة وجزء العدد بشكل منفصل.

بالنسبة للإشارة، بما أن الحدَّ الأول «+» وتتناوب، فإنها (−١)$^{\text{ن}-١}$

إذا كان الحدُّ الأول «−» وتتناوب، فإنها (−١)$^{\text{ن}}$.

بالنسبة للعدد، بما أنه ٢ × (رقم الحدِّ)، فهو ٢ن

الأعداد الزوجية هى ٢ن.

إذن، أن = (−١)$^{\text{ن}-١}$ × ٢ن

(ج) بالنسبة للمتتابعات الكسرية، انظر فى انتظام المقام والبسط بشكل منفصل.

المقام هو ٢ × (رقم الحدِّ) −١، إذن ٢ن − ١

الأعداد الفردية هى ٢ن − ١

البسط هو (رقم الحدِّ)، إذن ن

إذن، أن = $\frac{\text{ن}}{٢\text{ن}-١}$

اعمل مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقشوا الإجابة.

حاوِل

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان الحدُّ العام للمتتابعة {أن} معطًى بالقوانين الآتية، فأوجد الحدَّ الأول حتى الحدِّ الثالث من المتتابعة.

(أ) أن = ٢ن − ٣ **(ب)** أن = ٢ × ٣$^{\text{ن}}$ **(ج)** أن = ن^{٢} − ٧ن **(د)** أن = $\frac{\text{ن}}{٢\text{ن}+١}$

٢ استنتج الحدَّ العام للمتتابعات الآتية {أن}.

(أ) ٠، ١، ٨، ٢٧، ٦٤، ... **(ب)** −٣، ٦، −٩، ١٢، −١٥، ...

(ج) ٢، ٥، ٨، ١١، ١٤، ... **(د)** ١، $\frac{٣}{٤}$، $\frac{٥}{٩}$، $\frac{٧}{١٦}$، $\frac{٩}{٢٥}$، ...

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان الحدُّ العام للمتتابعة {أن} معطًى بالقوانين الآتية، فأوجد الحدَّ الأول حتى الحدِّ الثالث من المتتابعة.

(أ) أن = ٥ن – ٨ **(ب)** أن = –٣ن + ١ **(جـ)** أن = –٢ن – ٤ **(د)** أن = $٣^{ن}$ – ١

(هـ) أن = $(-٣)^{ن}$ **(و)** أن = ٣ × $(-٢)^{ن}$ **(ز)** أن = $ن^{٢}$ – ١ **(ح)** أن = $ن^{٢}$ + ن + ١

(ط) أن = $ن^{٢}$ + ٢ن + ٤ **(ى)** أن = $\frac{١}{٣ن-٢}$ **(ك)** أن = $\frac{٢ن}{ن+٣}$ **(ل)** أن = $\frac{ن+١}{٢ن-١}$

٢ استنتج الحدَّ العام للمتتابعات الآتية {أن}.

(أ) ٠، ٢، ٤، ٦، ٨، ... **(ب)** ١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥، ...

(جـ) ٠، ٣، ٦، ٩، ١٢، ... **(د)** –٥، –١٠، –١٥، –٢٠، –٢٥، ...

(هـ) ١، $-\frac{١}{٣}$، $\frac{١}{٥}$، $-\frac{١}{٧}$، $\frac{١}{٩}$، ... **(و)** –١، ٤، –٧، ١٠، –١٣، ...

(ز) $٧^{٢}$، $٨^{٢}$، $٩^{٢}$، $١٠^{٢}$، $١١^{٢}$، ... **(ح)** ٤، ٩، ١٤، ١٩، ٢٤، ...

(ط) ٦، ١٣، ٢٠، ٢٧، ٣٤، ... **(ى)** $\frac{١}{٢}$، $\frac{٢}{٣}$، $\frac{٣}{٤}$، $\frac{٤}{٥}$، $\frac{٥}{٦}$، ...

(ك) ١ × ٣، ٣ × ٩، ٢٧ × ٤، ٨١ × ٥، ٢٤٣ × ...

★ التحدِّى

١ × $\frac{١}{٢}$، ٢ × $\frac{١}{٣}$، ٣ × $\frac{١}{٤}$، ٤ × $\frac{١}{٥}$، ٥ × $\frac{١}{٦}$، ...

استنتج الحدَّ العام، ثم أوجد الحدَّ العشرين.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢-٢ الرياضيات

المتتابعة الحسابية (١)

الفصل الثانى المتتابعات

نواتج التعلّم

حساب الحدّ العام للمتتابعة الحسابية، وإيجاد بعض حدودها المعيّنة.

أ١، أ٢، أ٣، ... ، أ ن – ١، أ ن

لاحظ!

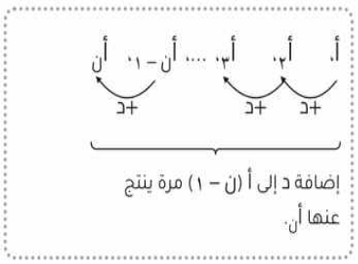
- المتتابعة التى نحصل عليها بإضافة عدد ثابت د إلى كل حدٍّ سابق بالتتابع تُسمَّى متتابعة حسابية، ويُسمَّى العدد الثابت د الأساس.

مثال: متتابعة حسابية حدُّها الأول ١ وأساسها ٣

١، ٤، ٧، ١٠، ١٣، ...

(+٣) (+٣) (+٣) (+٣)

- الحدُّ العام للمتتابعة الحسابية التى حدُّها الأول أ وأساسها د هو أن = أ + (ن – ١)د



استعِدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحدَّ الأول والأساس للمتتابعات الحسابية الآتية.

(أ) ٢، ٥، ٨، ١١، ...

(ب) ٣، – ٢، – ٧، – ١٢، – ١٧، ...

٢ المتتابعات الآتية متتابعات حسابية. أوجد الأساس والعددين المناسبين لـ [أ] و [ب].

(أ) [أ]، ٢، – ١، [ب]، ...

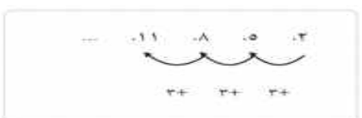
(ب) ١٣، [أ]، [ب]، – ٢، ...

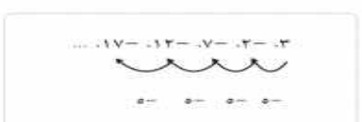
٣ للمتتابعة الحسابية {أن} التى حدُّها الأول ٨ وأساسها –٦، أوجد الحدَّ العام. كذلك، أوجد الحدَّ العشرين.

طريقة الحلّ

١ **(أ)** الحدُّ الأول: ٢، الأساس: ٣

(ب) الحدُّ الأول: ٣، الأساس: –٥





٢ (أ) أ، ٢، –١، ب، ... (–٣ –٣ –٣ –٣)

الفرق المشترك: –٣، أ: ٥، ب: –٤

(ب) ١٣، أ، ب، –٢، ... (د د د د)

–١٥

ليكن الأساس المتوقَّع د، إذن ٣د = –١٥، ومن ثَمَّ د = –٥

الأساس: –٥، أ: ٨، ب: ٣

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٣ يُوجَد الحدُّ العام بتعويض أ = ٨، د = −٦ فى أن = أ + (ن − ١)د

أن = ٨ + (ن − ١) × (−٦)

= ٨ − ٦ن + ٦

= −٦ن + ١٤ أن = −٦ن + ١٤

يُوجَد الحدُّ العشرون بتعويض ن = ٢٠ فى أن = −٦ن + ١٤

أ٢٠ = −٦ × ٢٠ + ١٤

= −١٠٦ أ٢٠ = −١٠٦

حاوِل

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحدَّ الأول والأساس للمتتابعات الحسابية الآتية.

(أ) ١، ٥، ٩، ١٣، ١٧، ... **(ب)** ٢٣، ١٩، ١٥، ١١، ٧، ...

٢ المتتابعات الآتية متتابعات حسابية. أوجد الأساس والعددين المناسبين

لـ أ و ب .

(أ) ٢، ٩، أ، ب، ... **(ب)** أ، ١٧، ب، ٥، ...

٣ للمتتابعات الحسابية الآتية {أن}، أوجد الحدَّ العام. كذلك، أوجد الحدَّ السابع.

(أ) الحدُّ الأول ٤، والأساس ٣ **(ب)** الحدُّ الأول ٢، والأساس −٣

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحدَّ الأول والأساس للمتتابعات الحسابية الآتية.

(أ) ٣، ٥، ٧، ٩، ١١، ... **(ب)** −١٣، −٩، −٥، −١، ٣، ...

(جـ) −٢، ١، ٤، ٧، ١٠، ... **(د)** ١٠، ٧، ٤، ١، −٢، ...

(هـ) ٦، $\frac{١٦}{٣}$، $\frac{١٤}{٣}$، ٤، $\frac{١٠}{٣}$، ... **(و)** −٤، $-\frac{٩}{٢}$، −٥، $-\frac{١١}{٢}$، −٦، ...

اعمل مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢ المتتابعات الآتية متتابعات حسابية. أوجد الأساس والعددين المناسبين لـ [أ] و [ب].

(أ) ٨، ١٥، [أ]، [ب]، ...

(ب) ٧، ١٣، [أ]، [ب]، ...

(ج) [أ]، ٩، ٤، [ب]، ...

(د) [أ]، ١٥، [ب]، ٩، ...

(هـ) ١١، [أ]، [ب]، ٢٠، ...

(و) ١٧، [أ]، [ب]، ٥، [ج]، ...

٣ للمتتابعات الحسابية الآتية {أن}، أوجد الحدَّ العام. كذلك، أوجد الحدَّ السابع.

(أ) الحدُّ الأول ٥، والأساس ٤

(ب) الحدُّ الأول –٢، والأساس ٣

(ج) الحدُّ الأول ١٠، والأساس –٣

(د) الحدُّ الأول $-\frac{١}{٢}$، والأساس $-\frac{١}{٢}$

٤ للمتتابعات الحسابية الآتية {أن}، أوجد الحدَّ العام. كذلك، أوجد الحدَّ العاشر.

(أ) الحدُّ الأول –٧، والأساس ٣

(ب) الحدُّ الأول –٢، والأساس –٣

(ج) الحدُّ الأول ٧، والأساس $\frac{١}{٢}$

(د) الحدُّ الأول $\frac{٢}{٣}$، والأساس $-\frac{١}{٣}$

★ التحدّى

فى متتابعة حسابية، مجموع الحدِّ الثالث والحدِّ السابع يساوى ٣٨، ونسبة الحدِّ الرابع إلى الحدِّ الثانى عشر تساوى $\frac{٢}{٥}$. أوجد الحدَّ الأول لهذه المتتابعة وأساسها.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢-٣
الرياضيات

المتتابعة الحسابية (٢)

الفصل الثانى المتتابعات

لاحِظ!

- الحدُّ العام أن للمتتابعة الحسابية {أن} هو أ + (ن – ١)د
- عند إيجاد الحدِّ العام للمتتابعة الحسابية، أوجد أولًا الحدَّ الأول أ والأساس د
- عندما تكون المتتابعة أ، ب، ج متتابعة حسابية بهذا الترتيب:

٢ب = أ + ج

نواتج التعلّم

حساب الحدِّ العام للمتتابعة الحسابية، وإيجاد بعض حدودها المعيَّنة.

بالنظر فى أ، ب، ج :

د+ د+

٢ب = (أ + د) + (ج – د)

= أ + ج

استعِدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحدَّ العام للمتتابعة الحسابية {أن} التى حدُّها الثالث ١٠ وحدُّها الثامن ٥٠

٢ للمتتابعة الحسابية {أن} التى أساسها ٤ وحدُّها الثامن ٣٣، حلّ المسائل الآتية.

(أ) أوجد رقم الحدِّ الذى يساوى ١١٣ **(ب)** أوجد رتبة أول حد قيمته أكبر من ٥٠٠

٣ عندما تُكوِّن الأعداد الثلاثة س، ٦، س^{٢} متتابعة حسابية بهذا الترتيب، أوجد قيمة س

طريقة الحلّ

١ ليكن الحدُّ العام أن = أ + (ن – ١)د

بما أن أ$_{٣}$ = ١٠، فإن ١٠ = أ + (٣ – ١)د، وبتبسيط ذلك ١٠ = أ + ٢د .....(١)

وبما أن أ$_{٨}$ = ٥٠، فإن ٥٠ = أ + (٨ – ١)د، وبتبسيط ذلك ٥٠ = أ + ٧د .....(٢)

بحلّ (١) و(٢) معًا: أ = –٦، د = ٨

إذن الحدُّ العام هو أن = –٦ + (ن – ١) × ٨

= ٨ن – ١٤ أن = ٨ن – ١٤

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢ ليكن الحدُّ العام لـ{أن} هو أن = أ + (ن – ١)د

أوجد الحدَّ العام أولًا.

بما أن الأساس ٤ وأ٨ = ٣٣، فإن ٣٣ = أ + (٨ – ١) × ٤

بحلّ ذلك: أ = ٥

إذن الحدُّ العام لـ{أن} هو أن = ٥ + (ن – ١) × ٤

أن = ٤ن + ١

(أ) نبحث عن ن بحيث أن = ١١٣

١١٣ = ٤ن + ١، وبحلّ ذلك ن = ٢٨

إذن، **الحدُّ الثامن والعشرون**.

(ب) نبحث عن أصغر عدد طبيعى ن بحيث أن > ٥٠٠

حوِّل إلى صورة عشرية للدراسة.

٤ن + ١ > ٥٠٠، وبحلّ ذلك ن > $\frac{٤٩٩}{٤}$ = ١٢٤,٧٥

إذن، **الحدُّ الخامس والعشرون بعد المائة**.

٣ بما أن س، ٦، س٢ تُكوِّن متتابعة حسابية بهذا الترتيب:

٢ب = أ + جـ

٢ × ٦ = س + س٢

وبحلّ ذلك: س = – ٤، ٣

حاوِل

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحدَّ العام للمتتابعات الحسابية الآتية {أن}.

(أ) الحدُّ الأول هو –٥، والحدُّ السابع عشر هو ٧٥

(ب) الأساس هو ٣، والحدُّ السادس عشر هو ٨١

(جـ) الحدُّ السادس هو ٢، والحدُّ الخامس عشر هو –٢٥

٢ للمتتابعة الحسابية {أن} ذات الحدِّ الأول ١ والأساس ٣، حلّ المسائل الآتية.

(أ) حدِّد أىَّ حدٍّ يساوى ٤٠ **(ب)** أوجد أول حدٍّ أكبر من ١٠٠

٣ عندما تُكوِّن الأعداد الثلاثة س٢، س، –٨ متتابعة حسابية بهذا الترتيب، أوجد قيمة س

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحدَّ العام للمتتابعات الحسابية الآتية {أن}.

(أ) الحدُّ الأول ٦، والحدُّ الرابع ١٨

(ب) الحدُّ الأول ٢٠، والحدُّ الثامن –١

(جـ) الحدُّ الأول –٨، والحدُّ الثامن ٥٥

(د) الحدُّ الأول –١٨، والحدُّ العاشر –٦٣

(هـ) الأساس ٢، والحدُّ الثامن ٤

(و) الأساس –٤، والحدُّ الخامس –٧

(ز) الأساس –٧، والحدُّ السادس –٢٤

(ح) الأساس $\frac{٢}{٥}$، والحدُّ الثلاثون $\frac{٢٣}{٥}$

(ط) الحدُّ الرابع ١٤، والحدُّ العاشر ٦٢

(ى) الحدُّ الثالث ٣٠، والحدُّ العاشر ٢

(ك) الحدُّ العاشر ٤٩، والحدُّ الثالث والعشرون ١٠

(ل) الحدُّ الثالث ٦، والحدُّ العاشر ٦٢

٢ للمتتابعة الحسابية {أن} التى أساسها –٥ وحدُّها الثالث عشر –٧، حلّ المسائل الآتية.

(أ) حدِّد أىَّ حدٍّ يساوى –٥٢

(ب) أوجد أول حدٍّ يكون أصغر من –٣٠٠

٣ للمتتابعة الحسابية {أن} التى حدُّها العاشر –٢٠ وحدُّها العشرون –٥٠، حلّ المسائل الآتية.

(أ) حدِّد أىَّ حدٍّ يساوى –١١٠

(ب) أوجد أول حدٍّ يكون أصغر من –٥٠٠

٤ عندما تُكوِّن الأعداد الثلاثة أ، ٦، ٢أ متتابعة حسابية بهذا الترتيب، أوجد قيمة أ

٥ عندما تُكوِّن الأعداد الثلاثة –٣، س، س^{٢} متتابعة حسابية بهذا الترتيب، أوجد قيمة س

★ التحدّى

عندما تُكوِّن الأعداد الأربعة ٢، س، ص، ع متتابعة حسابية بهذا الترتيب، وتُكوِّن ٢س، ص + ١، ع – ص كذلك متتابعة حسابية بهذا الترتيب، أوجد قيم س، ص، ع

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٤-٢
الرياضيات

مجموع المتتابعة الحسابية (١)

الفصل الثانى المتتابعات

نواتج التعلّم

حساب الحدّ العام للمتتابعة الحسابية. إيجاد بعض الحدود المعيَّنة فى متتابعة حسابية. إيجاد مجموع المتتابعة الحسابية.

لاحظ!

- فى متتابعة مؤلَّفة من ن حدًا، يُسمَّى ن عدد الحدود، ويُسمَّى الحدُّ الأخير الحدَّ الأخير.

لتكن $م_{ن}$ مجموع الحدود من الحدِّ الأول حتى الحدِّ ن لمتتابعة حسابية.

عندما يكون الحدُّ الأول أ، والحدُّ الأخير ل، وعدد الحدود ن:

$$م_{ن} = \frac{١}{٢}ن(أ + ل)$$

وعندما يكون الحدُّ الأول أ، والأساس د، وعدد الحدود ن:

$$م_{ن} = \frac{١}{٢}ن\{٢أ + (ن - ١)د\}$$

عوِّض بـ ل = أ + (ن – ١)د فى القانون أعلاه.

- عندما يكون عدد الحدود ن مجهولًا، أوجد ن أولًا باستخدام ل = أ + (ن – ١)د

استعِدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد مجموع المتتابعات الحسابية الآتية.

(أ) $م_{٧}$ لمتتابعة حدُّها الأول ٨، وحدُّها الأخير ٢٢، وعدد حدودها ٧

(ب) م لمتتابعة حدُّها الأول ٢، وأساسها ٣، وحدُّها الأخير ٤٧

(جـ) $م_{١٣}$ لمتتابعة حدُّها الأول ٢٠، وأساسها –٥، وعدد حدودها ١٣

(د) $م_{ن}$ من الحدِّ الأول حتى الحدِّ ن لمتتابعة حدُّها الأول ١، وأساسها ٤

٢ للمتتابعة الحسابية ٩٠، ٨٤، ٧٨، ... ، أوجد المجموع من الحدِّ العاشر حتى الحدِّ العشرين.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

طريقة الحلّ

١ **(أ)** بما أن أ = ٨، ل = ٢٢، ن = ٧:

$م_{٧} = \frac{١}{٢} \times ٧(٨ + ٢٢)$

$= ١٠٥$

(ب) أوجد أولًا عدد الحدود. لتكن ن عدد الحدود.

بما أن الحدَّ الأول ٢، والأساس ٣، والحدَّ الأخير ٤٧:

$٤٧ = ٢ + (ن - ١) \times ٣$

بحلّ هذه المعادلة: ن = ١٦

$م = \frac{١}{٢} \times ١٦(٢ + ٤٧)$

$= ٣٩٢$

(جـ) بما أن أ = ٢٠، د = −٥، ن = ١٣:

$م_{١٣} = \frac{١}{٢} \times ١٣\{٢ \times ٢٠ + (١٣ - ١) \times (-٥)\}$

$= -١٣٠$

(د) بما أن أ = ١، د = ٤:

$م_{ن} = \frac{١}{٢}ن\{٢ \times ١ + (ن - ١) \times ٤\}$

$= \frac{١}{٢}ن(٢ + ٤ن - ٤) = \frac{١}{٢}ن(٤ن - ٢)$

$= ٢ن^{٢} - ن$

٢ المجموع المطلوب يُحسب بـ $م_{٢٠} - م_{٩}$

بما أن أ = ٩٠، د = −٦:

$م_{٢٠} = \frac{١}{٢} \times ٢٠\{٢ \times ٩٠ + (٢٠ - ١) \times (-٦)\} = ٦٦٠$

$م_{٩} = \frac{١}{٢} \times ٩\{٢ \times ٩٠ + (٩ - ١) \times (-٦)\} = ٥٩٤$

إذن، ٦٦٠ − ٥٩٤ = ٦٦

ل = أ + (ن − ١)د

بما أن عدد الحدود هو ن، أوجد قيمة التعبير بدلالة ن.

$أ_{١} + أ_{٢} + أ_{٣} + \ldots + أ_{٩} + أ_{١٠} + \ldots + أ_{٢٠}$

$م_{٩}$ — المجموع المطلوب

$م_{٢٠}$

حاوِل

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد مجموع المتتابعات الحسابية الآتية.

(أ) $م_{١٠}$ لمتتابعة حدُّها الأول ٧، وحدُّها الأخير ١٣، وعدد حدودها ١٠

(ب) م لمتتابعة حدُّها الأول ٥، وأساسها ٣، وحدُّها الأخير ٤٤

(جـ) $م_{١٢}$ لمتتابعة حدُّها الأول −٦، وأساسها ٣، وعدد حدودها ١٢

(د) $م_{ن}$ من الحدِّ الأول حتى الحدِّ ن لمتتابعة حدُّها الأول ٢، وأساسها −٣

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢ للمتتابعة الحسابية التى حدُّها الأول ٤٨ وأساسها –٢، أوجد المجموع من الحدِّ العشرين حتى الحدِّ الثلاثين.

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد مجموع المتتابعات الحسابية الآتية.

(أ) $م_{١٠}$ لمتتابعة: الحدُّ الأول ٣، الحدُّ الأخير ٢١، عدد الحدود ١٠

(ب) $م_{٨}$ لمتتابعة: الحدُّ الأول ٥، الحدُّ الأخير ٣٣، عدد الحدود ٨

(جـ) $م_{١٠}$ لمتتابعة: الحدُّ الأول ٢، الحدُّ الأخير ٢٩، عدد الحدود ١٠

(د) م لمتتابعة: الحدُّ الأول ٣، الأساس ٤، الحدُّ الأخير ٧٥

(هـ) م لمتتابعة: الحدُّ الأول ٢، الأساس ٥، الحدُّ الأخير ٥٧

(و) م لمتتابعة: الحدُّ الأول ٤، الأساس ٣، الحدُّ الأخير ١٠٠

(ز) $م_{١٥}$: الحدُّ الأول ١٠، الأساس –٣، عدد الحدود ١٥

(ح) $م_{١١}$: الحدُّ الأول –٤، الأساس ٤، عدد الحدود ١١

(ط) $م_{١٨}$: الحدُّ الأول ٣، الأساس ٢، عدد الحدود ١٨

(ى) $م_{ن}$ من الحدِّ الأول حتى الحدِّ ن: الحدُّ الأول ٠، الأساس ٥

(ك) $م_{ن}$ من الحدِّ الأول حتى الحدِّ ن: الحدُّ الأول ٣، الأساس –٤

(ل) $م_{ن}$ من الحدِّ الأول حتى الحدِّ ن: الحدُّ الأول –٤، الأساس –٢

٢ للمتتابعة الحسابية –٩ ، –٣ ، ٣ ، ... ، أوجد المجموع من الحدِّ الحادى عشر حتى الحدِّ العشرين.

٣ للمتتابعة الحسابية التى حدُّها الأول –٥٣ وأساسها ٤، أوجد المجموع من الحدِّ العاشر حتى الحدِّ الخامس والعشرين.

٤ للمتتابعة الحسابية ٧٤، ٦٩، ٦٤، ... ، أوجد المجموع من الحدِّ الثامن حتى الحدِّ الثامن عشر.

★ التحدّى

للمتتابعة الحسابية ٩٤، ٨٩، ٨٤، ... ، أوجد مجموع الحدود الفردية من الحدِّ الأول حتى الحدِّ الحادى عشر.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٥-٢
الرياضيات

مجموع المتتابعة الحسابية (٢) (مجموع الأعداد الطبيعية)

الفصل الثانى المتتابعات

نواتج التعلّم

حساب الحدّ العام للمتتابعة الحسابية. إيجاد بعض الحدود المعيَّنة فى متتابعة حسابية. إيجاد مجموع المتتابعة الحسابية (الأعداد الطبيعية).

لاحِظ!

- استخدِم المتتابعات الحسابية فى المسائل التى تتعلق بمجاميع الأعداد الطبيعية أو المضاعفات.
- مجموع المتتابعة الحسابية م$_{ن}$ من الحدّ الأول حتى الحدّ ن هو: عندما يكون الحدُّ الأول أ، والحدُّ الأخير ل، وعدد الحدود ن:

$$م_{ن} = \frac{١}{٢}ن(أ + ل)$$

وعندما يكون الحدُّ الأول أ، والأساس د، وعدد الحدود ن:

$$م_{ن} = \frac{١}{٢}ن\{٢أ + (ن - ١)د\}$$

- عندما يكون عدد الحدود ن مجهولًا، أوجد ن أولًا باستخدام ل = أ + (ن – ١)د

استعِدّ

أوجد المجاميع الآتية.

١ مجموع الأعداد الطبيعية من ١ إلى ١٠٠

٢ مجموع الأعداد الطبيعية من ١٠١ إلى ٢٠٠

٣ مجموع مضاعفات العدد ٣ من بين الأعداد الطبيعية المؤلَّفة من رقمين.

طريقة الحلّ

١ بما أن المجموع المطلوب هو ١ + ٢ + ٣ + … + ١٠٠:

اكتب الحدود صراحةً، ثم انظر فى الحدّ الأول والحدّ الأخير وعدد الحدود.

احسب مجموع متتابعة حسابية حدُّها الأول ١، وحدُّها الأخير ١٠٠، وعدد حدودها ١٠٠

م$_{ن}$ = $\frac{١}{٢}$ن(أ + ل)

١ + ٢ + ٣ + … + ١٠٠ = $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠(١ + ١٠٠)

= ٥٠٥٠

٢ بما أن المجموع المطلوب هو ١٠١ + ١٠٢ + ١٠٣ + … + ٢٠٠:

يوجد ١٠٠ عدد طبيعى من ١٠١ إلى ٢٠٠

احسب مجموع متتابعة حسابية حدُّها الأول ١٠١، وحدُّها الأخير ٢٠٠، وعدد حدودها ١٠٠

١٠١ + ١٠٢ + ١٠٣ + … + ٢٠٠ = $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠(١٠١ + ٢٠٠)

= ١٥٠٥٠

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٣ بما أن المجموع المطلوب هو ١٢ + ١٥ + ١٨ + ... + ٩٩:

احسب مجموع متتابعة حسابية حدُّها الأول ١٢، وأساسها ٣، وحدُّها الأخير ٩٩

أوجد أولًا عدد الحدود. لتكن ن عدد الحدود.

٩٩ = ١٢ + (ن – ١) × ٣، وبحلّ ذلك ن = ٣٠

١٢ + ١٥ + ١٨ + ... + ٩٩ = $\frac{١}{٢}$ × ٣٠(١٢ + ٩٩)

= ١٦٦٥

بما أن عدد الحدود ن مجهول، أوجد ن باستخدام ل = أ + (ن – ١)د.

حاوِل

أوجد المجاميع الآتية.

١ مجموع الأعداد الطبيعية من ١ إلى ٢٠٠

٢ مجموع الأعداد الطبيعية من ٢٠١ إلى ٣٠٠

٣ مجموع جميع الأعداد الطبيعية المؤلَّفة من رقمين والتى هى مضاعفات للعدد ٥

٤ مجموع جميع الأعداد الطبيعية المؤلَّفة من رقمين والتى يكون باقى قسمتها على ٥ يساوى ٣

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا الإجابة.

تدرَّب

أوجد المجاميع الآتية.

١ مجموع الأعداد الطبيعية من ١ إلى ١٥٠

٢ مجموع الأعداد الطبيعية من ٨١ إلى ١٥٠

٣ مجموع الأعداد الطبيعية من ٣٠١ إلى ٤٠٠

٤ مجموع الأعداد الطبيعية المؤلَّفة من رقمين.

٥ مجموع الأعداد الفردية المؤلَّفة من رقمين.

٦ مجموع مضاعفات العدد ٤ من ١ إلى ١٠٠

٧ مجموع جميع الأعداد الطبيعية من ١ إلى ١٠٠ التى يكون باقى قسمتها على ٤ يساوى ١

٨ مجموع جميع مضاعفات العدد ٦ من ١٠ إلى ١٠٠

٩ مجموع جميع الأعداد الطبيعية من ١٠ إلى ١٠٠ التى لا تقبل القسمة على ٦

★ التحدّى

أوجد مجموع الأعداد التى لا تقبل القسمة على ٤ من ١ إلى ١٠٠

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٦-٢
الرياضيات

مجموع المتتابعة الحسابية (٣)

الفصل الثانى المتتابعات

نواتج التعلّم

إيجاد مجموع المتتابعة الحسابية. تحديد عدد الحدود فى متتابعة حسابية.

لاحظ!

مجموع المتتابعة الحسابية م$_{ن}$ من الحدِّ الأول حتى الحدِّ ن هو:

عندما يكون الحدُّ الأول أ، والحدُّ الأخير ل، وعدد الحدود ن: م$_{ن}$ = $\frac{١}{٢}$ن(أ + ل)

وعندما يكون الحدُّ الأول أ، والأساس د، وعدد الحدود ن: م$_{ن}$ = $\frac{١}{٢}$ن{٢أ + (ن – ١)د}

لإيجاد أكبر قيمة لمجموع متتابعة حسابية أساسها سالب، احسب مجموع الحدود الموجبة.

مثال: متتابعة حسابية حدُّها الأول ١١ وأساسها –٣

١١، ٨، ٥، ٢، –١، –٤، ...

المجموع حتى هذا الحدِّ يكون أكبر ما يمكن.

استعِدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ فى متتابعة حسابية حدُّها الأول ٤ وأساسها ٣، أوجد كم حدًّا من الحدِّ الأول يكون مجموعها ٥٠

٢ أوجد الحدَّ العام للمتتابعة الحسابية {أ$_{ن}$} التى حدُّها الأول –٦٠ ومجموع حدودها من الحدِّ الأول إلى الحدِّ الخامس عشر هو –٦٠

٣ فى متتابعة حسابية حدُّها الأول ٦٥ وأساسها –٤، أوجد عدد الحدود من البداية الذى يعطى أكبر مجموع. وأوجد أيضًا المجموع المقابل.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

طريقة الحلّ

١ افترض أن مجموع الحدود من الحدِّ الأول حتى الحدِّ ن لمتتابعة حسابية حدُّها الأول ٤ وأساسها ٣ يساوى ٥٠

$٥٠ = \frac{١}{٢}ن\{٢ \times ٤ + (ن - ١) \times ٣\}$

وبالتبسيط: $٣ن^{٢} + ٥ن - ١٠٠ = ٠$

وبحلّ ذلك: $ن = ٥ ، - \frac{٢٠}{٣}$. وبما أن ن عدد طبيعى، فإنها **خمسة حدود**.

٢ ليكن د أساس المتتابعة الحسابية المطلوبة.

بما أن الحدَّ الأول = –٦٠ ومجموع الحدود حتى الحدِّ الخامس عشر = –٦٠:

$-٦٠ = \frac{١}{٢} \times ١٥\{٢ \times (-٦٠) + (١٥ - ١)د\}$

وبحلّ ذلك: د = ٨

إذن الحدُّ العام هو $أ_{ن} = -٦٠ + (ن - ١) \times ٨$

وبالتبسيط: $أ_{ن} = ٨ن - ٦٨$

٣ الحدُّ العام لهذه المتتابعة هو $أ_{ن} = ٦٥ + (ن - ١) \times (-٤)$

$= -٤ن + ٦٩$

وبحلّ $-٤ن + ٦٩ > ٠$ نجد أن $ن < \frac{٦٩}{٤} = ١٧,٢٥$

أى أن الحدود من الأول حتى السابع عشر موجبة، والحدود من الثامن عشر فصاعدًا سالبة.

إذن المجموع حتى الحدِّ السابع عشر يكون أكبر ما يمكن: **الحدُّ السابع عشر**

والمجموع حينئذٍ هو مجموع متتابعة حسابية حدُّها الأول ٦٥، وأساسها –٤، وعدد حدودها ١٧:

$\frac{١}{٢} \times ١٧\{٢ \times ٦٥ + (١٧ - ١) \times (-٤)\} = ٥٦١$

أخطاء شائعة

$م_{ن} = \frac{١}{٢}ن\{٢ \times ٦٥ + (ن - ١)(-٤)\} > ٠$

أنت هنا تحلّ لمعرفة متى يكون **المجموع** موجبًا ($م_{ن} > ٠$). بدلًا من إيجاد الحدِّ الذى تظلّ المتتابعة موجبة حتى عنده ($أ_{ن} > ٠$).

لإيجاد الحدِّ العام تحتاج الحدَّ الأول أ والأساس د.

أوجد إلى أى حدٍّ تظلّ الحدود موجبة.

$أ_{١}, أ_{٢}, ... , أ_{١٧}$ | $أ_{١٨}, أ_{١٩}, ...$

حدود موجبة — حدود سالبة

حاوِل

حلّ المسائل الآتية.

١ فى متتابعة حسابية حدُّها الأول ١٧ وأساسها –٢، أوجد كم حدًّا من الحدِّ الأول يكون مجموعها –٦٣

٢ أوجد الحدَّ العام للمتتابعة الحسابية $\{أ_{ن}\}$ التى حدُّها الأول ٨ ومجموع حدودها من الحدِّ الأول إلى الحدِّ الثالث عشر هو –١٣٠

٣ فى متتابعة حسابية حدُّها الأول ٧٠ وأساسها –٤، أوجد عدد الحدود من البداية الذى يعطى أكبر مجموع. وأوجد أيضًا المجموع المقابل.

٤ أوجد الحدَّ العام للمتتابعة الحسابية $\{أ_{ن}\}$ التى مجموع حدودها من الحدِّ الأول إلى الحدِّ العاشر هو ١٠، ومجموع حدودها من الحدِّ الأول إلى الحدِّ العشرين هو ٤٠

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد ن بحيث يكون مجموع أول ن حدًّا لمتتابعة حسابية حدُّها الأول ٣ وأساسها ٢ يساوى ٦٣

٢ أوجد ن بحيث يكون مجموع أول ن حدًّا لمتتابعة حسابية حدُّها الأول ٢٤ وأساسها –٤ يساوى –٢٨

٣ أوجد الحدَّ العام للمتتابعة الحسابية {أن} التى حدُّها الأول ٤ ومجموع حدودها الستة الأولى هو ١١٤

٤ فى متتابعة حدُّها الأول ٢٠ وأساسها –٦، أوجد قيمة ن التى تعطى أكبر مجموع، والمجموع المقابل.

٥ فى متتابعة حدُّها الأول ١٢٦ وأساسها –١٣، أوجد قيمة ن التى تعطى أكبر مجموع، والمجموع المقابل.

٦ أوجد الحدَّ العام للمتتابعة {أن} التى حدُّها الثالث ١٠ ومجموع حدودها العشرة الأولى ١٧٥

٧ أوجد الحدَّ العام للمتتابعة {أن} التى مجموع حدودها الستة الأولى هو ٣ ومجموع حدودها العشرة الأولى هو ٦٥

٨ أوجد الحدَّ العام للمتتابعة {أن} التى مجموع حدودها العشرين الأولى هو ٤٠٠ ومجموع حدودها الثلاثين الأولى هو ٩٠٠

★ التحدِّى

الحدُّ الخامس عشر فى متتابعة حسابية يساوى ٣٣، والحدُّ الخمسون يساوى ١٠٣. فما المجموع الجزئى التاسع والسبعون لهذه المتتابعة الحسابية؟

تأمَّل

«إذا كان منسوب الماء فى بحيرة ينخفض بمقدار ثابت كل يوم، فكيف يساعدنا فهم المتتابعات الحسابية على التنبّؤ بموعد نفاد الماء؟»

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٧-٢ المتتابعة الهندسية (١)

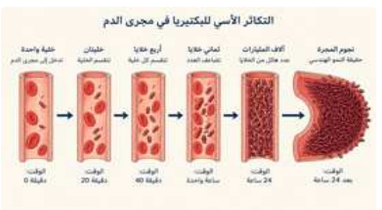
الرياضيات

الفصل الثانى المتتابعات

نواتج التعلّم

حساب الحدّ العام للمتتابعة الهندسية، وتعيين حدود معيَّنة فيها.

المفهوم ٢ ٠ المتتابعات الهندسية



تدخل بكتيريا إشريكية قولونية واحدة إلى مجرى الدم. وفى الظروف المثالية لا تنقسم إلى خليتين فحسب، بل تنقسم الخليتان إلى أربع خلايا، والأربع إلى ثمانى خلايا، فيتضاعف العدد كل ٢٠ دقيقة. وخلال ٢٤ ساعة تتكاثر تلك الخلية الواحدة إلى مستعمرة عددها آلاف المليارات من المليارات، تفوق عدد نجوم المجرّة. هذه هى حقيقة النمو الهندسى.

السؤال الموجِّه: كيف تتصاعد العمليات ذات القيم الابتدائية الصغيرة تصاعدًا سريعًا؟ وكيف نتنبّأ رياضيًّا بأثرها التراكمى عبر الزمن؟

لاحظ!

- المتتابعة التى نحصل على كل حدٍّ فيها بضرب الحدِّ السابق فى عدد ثابت ر تُسمَّى متتابعة هندسية، ويُسمَّى العدد الثابت ر الأساس.

  مثال: متتابعة هندسية حدُّها الأول ١ وأساسها ٢

  ١، ٢×١، ٤×٢، ٨×٤، ١٦×٨، ...

- الحدُّ العام للمتتابعة الهندسية التى حدُّها الأول أ وأساسها ر هو $أ_ن = أ ر^{ن-١}$

أ، أ ر، أ ر²، ... ، أ ر^(ن−١)

× ر × ر × ر

ضرب أ فى ر (ن − ١) مرة ينتج عنه أ ر^ن.

استعِدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحدَّ العام للمتتابعات الهندسية الآتية {أ_ن}.

(أ) الحدُّ الأول ٢، والأساس ٣ (ب) ٥، ١٠، ٢٠، ٤٠، ...

(جـ) −٤، ٦، −٩، $\frac{٢٧}{٢}$، ...

٢ المتتابعة الآتية متتابعة هندسية. أوجد الأساس والعددين المناسبين فيها.

أ ، ١٢، ٢٤، ب ، ...

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

طريقة الحلّ

١ **(أ)** $أ_{ن} = ٢ \times ٣^{ن-١}$

أ$_{ن}$ = أ$_{١}$ ر$^{ن-١}$

(ب) ليكن ر الأساس. بما أن الحدَّ الأول ٥ والحدَّ الثانى ١٠:

$أ_{٥} ر = ١٠$

$ر = ٢$

إذن، بما أنها متتابعة هندسية حدُّها الأول ٥ وأساسها ٢:

$أ_{ن} = ٥ \times ٢^{ن-١}$

(ج) ليكن ر الأساس. بما أن الحدَّ الأول -٤ والحدَّ الثانى ٦:

$-٤ ر = ٦$

$ر = -\frac{٣}{٢}$

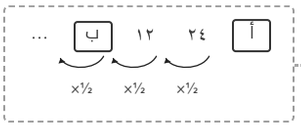
إذن، بما أنها متتابعة هندسية حدُّها الأول -٤ وأساسها $-\frac{٣}{٢}$:

استخدِم القوسين ( ) عندما يكون الأساس عددًا سالبًا أو كسرًا.

$أ_{ن} = -٤ \times \left(-\frac{٣}{٢}\right)^{ن-١}$

٢ ليكن ر الأساس المطلوب.

$٢٤ ر = ١٢$ ، إذن $ر = \frac{١}{٢}$



بما أن [أ] مضروبًا فى $\frac{١}{٢}$ يعطى ٢٤: $٢٤ \div \frac{١}{٢} = ٤٨$

وبما أن ١٢ مضروبًا فى $\frac{١}{٢}$ يعطى [ب]: $١٢ \times \frac{١}{٢} = ٦$

إذن الأساس: $\frac{١}{٢}$، [أ]: ٤٨، [ب]: ٦

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاوِل

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحدَّ العام للمتتابعات الهندسية الآتية {أن}.

(أ) الحدُّ الأول ٣، والأساس ٤

(ب) الحدُّ الأول ٥، والأساس −٢

(ج) الحدُّ الأول ٨، والأساس $-\frac{١}{٣}$

(د) ٢، ٦، ١٨، ٥٤، ...

(هـ) ٨، −١٢، ١٨، −٢٧، ...

(و) ٢، $\frac{٢}{٣}$، $\frac{٢}{٩}$، $\frac{٢}{٢٧}$، ...

٢ المتتابعة الآتية متتابعة هندسية. أوجد الأساس والعددين المناسبين فيها.

[أ]، −١٨، ٦، [ب]، ...

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحدَّ العام للمتتابعات الهندسية الآتية {أن}.

(أ) الحدُّ الأول ٥، والأساس ٢

(ب) الحدُّ الأول ٢، والأساس ٥

(ج) الحدُّ الأول ٧، والأساس ٤

(د) الحدُّ الأول ٢، والأساس −٣

(هـ) الحدُّ الأول ٣، والأساس −٥

(و) الحدُّ الأول ٤، والأساس −٢

(ز) الحدُّ الأول ٤، والأساس $\frac{١}{٣}$

(ح) الحدُّ الأول ٣، والأساس $-\frac{١}{٢}$

(ط) الحدُّ الأول ٦، والأساس $\frac{١}{٢}$

(ى) ٣، ٦، ١٢، ٢٤، ...

(ك) ٢، −٦، ١٨، −٥٤، ...

(ل) ٥، −١٠، ٢٠، −٤٠، ...

(م) ٤٨، ٢٤، ١٢، ٦، ...

(ن) $\frac{١}{٦}$، $\frac{١}{٤}$، $\frac{٣}{٨}$، $\frac{٩}{١٦}$، ...

(س) ١٦،٨، $\sqrt[٣]{١٢٨،٦٤}$، $\sqrt[٣]{}$، ...

(ع) ٣، $-\frac{١٥}{٢}$، $\frac{٧٥}{٤}$، $-\frac{٣٧٥}{٨}$، ...

(ف) ٩، −٣، $\sqrt[٣]{٣}$، −٣، $\sqrt[٣]{}$، ...

(ص) ٥، $-\frac{١٠}{٣}$، $\frac{٢٠}{٩}$، $-\frac{٤٠}{٢٧}$، ...

٢ المتتابعات الآتية متتابعات هندسية. أوجد الأساس والعددين المناسبين

لـ [أ] و [ب].

(أ) [أ]، −٣، ٩، [ب]، ...

(ب) [أ]، $\frac{١}{٣}$، $\frac{١}{٩}$، [ب]، ...

(ج) [أ]، $-\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٨}$، [ب]، ...

★ التحدّى

فى متتابعة هندسية تزايدية، إذا كان أ٣ + أ٥ = ٨٠ ، أ٤ = ٢٤، فأوجد أ٧

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٨-٢
الرياضيات

المتتابعة الهندسية (٢)

الفصل الثانى المتتابعات

نواتج التعلّم
حساب الحدّ العام للمتتابعة الهندسية، وتعيين حدود معيَّنة فيها.

لاحظ!

- الحدُّ العام للمتتابعة الهندسية التى حدُّها الأول أ وأساسها ر هو أن = أ ر^ن − ١
- عندما تكون المتتابعة أ، ب، ج متتابعة هندسية بهذا الترتيب:
  ب^٢ = أ ج

استعِدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحدَّ العام للمتتابعات الهندسية الآتية {أ ن}.

(أ) الحدُّ الرابع ٢٤، والحدُّ السادس ٩٦ **(ب)** الحدُّ الثالث ١٢، والحدُّ السادس −٩٦

٢ عندما تُكوِّن الأعداد الثلاثة ٢، س، ٨ متتابعة هندسية بهذا الترتيب، أوجد قيمة س

٣ عندما تُكوِّن الأعداد الثلاثة ٦، أ، ب متتابعة حسابية بهذا الترتيب، وتُكوِّن أ، ب، ١٦ متتابعة هندسية بهذا الترتيب، أوجد قيمتَى أ وب

طريقة الحلّ

١ **(أ)** ليكن الحدُّ العام أ ن = أ ر^ن − ١

بما أن الحدَّ الرابع ٢٤، فإن أ ر^٣ = ٢٤ .....(١)

وبما أن الحدَّ السادس ٩٦، فإن أ ر^٥ = ٩٦ .....(٢)

من (١) و(٢): أ ≠ ٠، ر ≠ ٠ . وبقسمة (٢) على (١):

$\frac{أ ر^{٥}}{أ ر^{٣}} = \frac{٩٦}{٢٤}$ ← اختصر الكسر.

ر^٢ = ٤، إذن ر = ±٢

من (١): عندما ر = ٢، فإن ٨أ = ٢٤، أى أ = ٣

وعندما ر = −٢، فإن −٨أ = ٢٤، أى أ = −٣

إذن أ ن = ٣ × ٢^ن − ١ أو أ ن = −٣ × (−٢)^ن − ١

أ ٤ = أ ر^٤ − ١ = أ ر^٣

أ ٦ = أ ر^٦ − ١ = أ ر^٥

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

(ب) ليكن الحدُّ العام أن = أ رن − ١

بما أن الحدَّ الثالث ١٢، فإن أ ر٢ = ١٢ .....(١)

وبما أن الحدَّ السادس −٩٦، فإن أ ر٥ = −٩٦ .....(٢)

من (١) و(٢): أ ≠ ٠، ر ≠ ٠. وبقسمة (٢) على (١):

$$\frac{أ\,ر^{٥}}{أ\,ر^{٢}} = \frac{-٩٦}{١٢}$$

ر٣ = −٨

وبما أن ر عدد حقيقى، فإن ر = −٢

وبالتعويض فى (١): ٤أ = ١٢، أى أ = ٣

إذن أن = ٣ × (−٢)ن − ١

ب٢ = أ ج

٢ بما أن ٢، س، ٨ تُكوِّن متتابعة هندسية بهذا الترتيب، فإن س٢ = ١٦

وبحلّ ذلك: س = ± ٤

٣ بما أن ٦، أ، ب تُكوِّن متتابعة حسابية بهذا الترتيب، فإن ٢أ = ٦ + ب .....(١)

وبما أن أ، ب، ١٦ تُكوِّن متتابعة هندسية بهذا الترتيب، فإن ب٢ = ١٦أ .....(٢)

من (١): ب = ٢أ − ٦ .....(١)'. وبالتعويض فى (٢) والتبسيط: ٤أ٢ − ٤٠أ + ٣٦ = ٠

وبحلّ ذلك: أ = ١، ٩

ومن (١)': عندما أ = ٩ يكون ب = ١٢؛ وعندما أ = ١ يكون ب = −٤

إذن أ = ٩، ب = ١٢ أو أ = ١، ب = −٤

حاوِل

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحدَّ العام للمتتابعات الهندسية الآتية {أن}.

(أ) الحدُّ الثالث ١٨، والحدُّ الخامس ١٦٢

(ب) الحدُّ الثانى −٦، والحدُّ الخامس ٤٨

(جـ) الحدُّ الثالث ١٢، والحدُّ السابع ١٩٢

٢ عندما تُكوِّن الأعداد الثلاثة ١، س، ١٢ متتابعة هندسية بهذا الترتيب، أوجد قيمة س

٣ عندما تُكوِّن الأعداد الثلاثة −٢، أ، ب متتابعة حسابية بهذا الترتيب، وتُكوِّن أ، ب، ١٨ متتابعة هندسية بهذا الترتيب، أوجد قيمتَى أ وب

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحدَّ العام للمتتابعات الهندسية الآتية {أن}.

(أ) الحدُّ الثانى ٦، والحدُّ الرابع ٥٤

(ب) الحدُّ الثالث ٢٧، والحدُّ الخامس ٢٤٣

(ج) الحدُّ الثالث –٢٨، والحدُّ الخامس –١١٢

(د) الحدُّ الثانى ١٤، والحدُّ الخامس ١١٢

(هـ) الحدُّ الرابع ١٦، والحدُّ السابع –١٢٨

(و) الحدُّ الثالث –٢٠، والحدُّ السادس ١٦٠

(ز) الحدُّ الثانى ٣، والحدُّ السادس ٧٦٨

(ح) الحدُّ الثالث ٩، والحدُّ السابع $\frac{٧٢٩}{١٦}$

(ط) الحدُّ الرابع $\frac{٢}{٩}$، والحدُّ الثامن ١٨

٢ عندما تُكوِّن الأعداد الثلاثة ١، س، ٢٥ متتابعة هندسية بهذا الترتيب، أوجد قيمة س

٣ عندما تُكوِّن الأعداد الثلاثة $\frac{١}{٢}$، س، ٨ متتابعة هندسية بهذا الترتيب، أوجد قيمة س

٤ عندما تُكوِّن الأعداد الثلاثة أ، ب، ٢ متتابعة حسابية بهذا الترتيب، وتُكوِّن أ، ٢، ب متتابعة هندسية بهذا الترتيب، أوجد قيمتَى أ وب

★ التحدِّى — ميزانية مبادرة الطاقة الخضراء

تخطِّط إدارةُ الاستدامة فى إحدى الشركات لميزانية ثلاثية السنوات للتخلّص التدريجى من الوقود الأحفورى. وهى تتابع مخصّصاتها التمويلية السنوية عبر ثلاث مراحل متتالية، وفق نموذجين اقتصاديين مختلفين:

النموذج ١ (توسّع خطّى): فى الظروف المستقرّة، يكون تمويل السنة الأولى محدودًا عند –٥ مئة ألف جنيه (دَين البنية التحتية الابتدائى)، تليه السنة الثانية أ والسنة الثالثة ب. وهذه الأعداد الثلاثة تُكوِّن متتابعة حسابية.

النموذج ٢ (تدرّج تراكمى): إذا حدث اختراق فى الطاقة النظيفة، تتغيّر الميزانية. فتُكوِّن مخصّصات السنة الثانية أ، والسنة الثالثة ب، وميزانية سنة رابعة مُتوقَّعة قدرها ٤٥ مئة ألف جنيه متتابعةً هندسية.

حدِّد قيمتَى الميزانية بالضبط لـأ (السنة الثانية) وب (السنة الثالثة) بحيث يتحقّق النموذجان معًا فى الوقت نفسه، لتنتقل الشركة انتقالًا سلسًا.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٩-٢
الرياضيات

مجموع المتتابعة الهندسية (١)

الفصل الثانى المتتابعات

نواتج التعلّم
حساب مجموع متتابعة هندسية مؤلَّفة من ن حدًّا.

لاحِظ!

مجموع المتتابعة الهندسية م$_{ن}$ التى حدُّها الأول أ وأساسها ر، من الحدِّ الأول حتى الحدِّ ن، هو:

عندما ر ≠ ١ :

$$م_{ن} = \frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$$

القانون الذى يُستعمل عندما يكون الأساس ر أصغر من ١

$$= \frac{أ(ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$$

القانون الذى يُستعمل عندما يكون الأساس ر أكبر من ١

استعِدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد مجموع م للمتتابعات الهندسية الآتية.

(أ) الحدُّ الأول ٤، والأساس ٣، وعدد الحدود ٥

(ب) الحدُّ الأول ٨، والأساس $\frac{١}{٢}$، وعدد الحدود ٦

٢ أوجد المجموع م$_{ن}$ من الحدِّ الأول حتى الحدِّ ن للمتتابعة الهندسية الآتية.

٢ ، – ٦ ، ١٨ ، – ٥٤ ، ...

طريقة الحلّ

١ (أ) بما أن أ = ٤، ر = ٣، ن = ٥:

بما أن الأساس ر أكبر من ١، استعمِل م$_{ن}$ = $\frac{أ(ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$

$$م = \frac{٤(٣^{٥} - ١)}{٣ - ١}$$

$$= ٢(٣^{٥} - ١) = ٤٨٤$$

(ب) بما أن أ = ٨، ر = $\frac{١}{٢}$، ن = ٦:

بما أن الأساس ر أصغر من ١، استعمِل م$_{ن}$ = $\frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$

$$م = \frac{٨\left\{١ - \left(\frac{١}{٢}\right)^{٦}\right\}}{١ - \frac{١}{٢}}$$

اضرب البسط والمقام فى ٢

$$= \frac{١٦\left\{١ - \left(\frac{١}{٢}\right)^{٦}\right\}}{٢ - ١}$$

$$= ١٦\left\{١ - \left(\frac{١}{٢}\right)^{٦}\right\} = \frac{٦٣}{٤}$$

٢ بما أن أ = ٢، ر = –٣:

بما أن الأساس ر أصغر من ١، استعمِل م$_{ن}$ = $\frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$

$$م_{ن} = \frac{٢\{١ - (-٣)^{ن}\}}{١ - (-٣)}$$

$$= \frac{١ - (-٣)^{ن}}{٢}$$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاوِل

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد مجموع م$_{ن}$ للمتتابعات الهندسية الآتية.

(أ) الحدُّ الأول ٣، والأساس ٢، وعدد الحدود ٥

(ب) الحدُّ الأول ٦، والأساس –٢، وعدد الحدود ٤

(جـ) الحدُّ الأول ٦، والأساس $\frac{١}{٢}$، وعدد الحدود ٦

٢ أوجد المجموع م$_{ن}$ من الحدِّ الأول حتى الحدِّ ن للمتتابعات الهندسية الآتية.

(أ) الحدُّ الأول ٣، والأساس –٢

(ب) ٨ ، – ٤، ٢ ، – ١ ، ...

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد مجموع م$_{ن}$ للمتتابعات الهندسية الآتية.

(أ) الحدُّ الأول ٥، والأساس ٣، وعدد الحدود ٤

(ب) الحدُّ الأول ١، والأساس –٣، وعدد الحدود ٤

(جـ) الحدُّ الأول ١، والأساس $\frac{١}{٣}$، وعدد الحدود ٣

(د) الحدُّ الأول ٣، والأساس ٢، وعدد الحدود ١٠

(هـ) الحدُّ الأول ٢، والأساس –٣، وعدد الحدود ٦

(و) الحدُّ الأول ١، والأساس $\frac{١}{٣}$، وعدد الحدود ٨

٢ أوجد المجموع م$_{ن}$ من الحدِّ الأول حتى الحدِّ ن للمتتابعات الهندسية الآتية.

(أ) الحدُّ الأول ٧، والأساس ٢

(ب) الحدُّ الأول ٢، والأساس $\frac{١}{٣}$

(جـ) ٢، ٦، ١٨، ٥٤ ، ...

(د) ١ ، – ٣ ، ٩ ، – ٢٧ ، ...

(هـ) الحدُّ الأول ٤، والأساس ٢

(و) الحدُّ الأول ١٦، والأساس $-\frac{١}{٢}$

(ز) ١ ، – ٢ ، ٤ ، – ٨ ، ...

★ التحدِّى

تُصمِّم شركةٌ للتقنيات البيئية مرشِّحات ماء متتالية. يحتجز كلُّ مرحلة منها ثلثَ ما تبقّى من اللدائن الدقيقة مقارنةً بالمرحلة السابقة. ويتدرّج مقياس الترشيح تدرّجًا هندسيًّا: ١، ٣، $\frac{١}{٣}$، $\frac{١}{٩}$، ... ملجم/لتر مُزالة فى كل مرحلة. احسب الكتلة الكلّية للملوِّثات المُزالة إذا كان النظام يستعمل ٤ مراحل ترشيح فى المجموع.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

١٠-٢
الرياضيات

مجموع المتتابعة الهندسية (٢)

الفصل الثانى المتتابعات

استعِدّ

أوجد الحدَّ الأول والأساس للمتتابعات الهندسية الآتية.

١ المجموع من الحدِّ الأول حتى الحدِّ الثالث يساوى ٣٥، والمجموع من الحدِّ الثالث حتى الحدِّ الخامس يساوى ١٤٠

٢ المجموع من الحدِّ الأول حتى الحدِّ الثالث يساوى ٢١، والمجموع من الحدِّ الأول حتى الحدِّ السادس يساوى ١٨٩

٣ الحدُّ الثالث ٤، والمجموع من الحدِّ الأول حتى الحدِّ الثالث يساوى ٧

نواتج التعلّم

حساب الحدِّ العام للمتتابعة الهندسية، وإيجاد حدود معيَّنة فيها، وكذلك مجموع حدودها كلِّها أو بعضها.

طريقة الحلّ

١ ليكن أ الحدَّ الأول ور الأساس.

بما أن المجموع من الحدِّ الأول حتى الثالث ٣٥، فإن أ + أر + أر^{٢} = ٣٥ .....(١)

وبما أن المجموع من الحدِّ الثالث حتى الخامس ١٤٠، فإن أر^{٢} + أر^{٣} + أر^{٤} = ١٤٠ .....(٢)

من (٢): ر^{٢}(أ + أر + أر^{٢}) = ١٤٠

حوّلها إلى صورة يمكن التعويض فيها بـ(١).

وبالتعويض بـ(١): ٣٥ر^{٢} = ١٤٠

وبحلّ ذلك: ر = ±٢

عندما ر = ٢، من (١): أ + ٢أ + ٤أ = ٣٥، وبحلّ ذلك أ = ٥

وعندما ر = –٢، من (١): أ – ٢أ + ٤أ = ٣٥، وبحلّ ذلك أ = $\frac{٣٥}{٣}$

إذن أ = ٥ ، ر = ٢ أو أ = $\frac{٣٥}{٣}$ ، ر = –٢

٢ ليكن أ الحدَّ الأول ور الأساس.

بما أن المجموع من الحدِّ الأول حتى الثالث ٢١، فإن أ + أر + أر^{٢} = ٢١ .....(١)

وبما أن المجموع من الحدِّ الأول حتى السادس ١٨٩، فإن أ + أر + أر^{٢} + أر^{٣} + أر^{٤} + أر^{٥} = ١٨٩ .....(٢)

من (٢): (أ + أر + أر^{٢}) + ر^{٣}(أ + أر + أر^{٢}) = ١٨٩

حوّلها إلى صورة يمكن التعويض فيها بـ(١).

وبالتعويض بـ(١): ٢١ + ٢١ر^{٣} = ١٨٩

وبحلّ ذلك فى مجموعة الأعداد الحقيقية: ر = ٢

من (١): أ + ٢أ + ٤أ = ٢١، وبحلّ ذلك أ = ٣. إذن أ = ٣ ، ر = ٢

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٣ ليكن أ الحدَّ الأول، ر الأساس.

بما أن الحدَّ الثالث ٤، فإن أر^{٢} = ٤ .....(١)

وبما أن المجموع من الحدِّ الأول حتى الثالث ٧، فإن أ + أر + أر^{٢} = ٧ .....(٢)

وبما أن ر ≠ ٠، فمن (١): أ = $\frac{٤}{ر^{٢}}$

وبالتعويض فى (٢): $\frac{٤}{ر^{٢}} + \frac{٤}{ر^{٢}} \times ر + \frac{٤}{ر^{٢}} \times ر^{٢} = ٧$ ← اضرب الطرفين فى ر^{٢}

٤ + ٤ر + ٤ر^{٢} = ٧ر^{٢}

وبحلّ ذلك: ر = ٢، $-\frac{٢}{٣}$

عندما ر = ٢، من (١): ٤أ = ٤، وبحلّ ذلك أ = ١

وعندما ر = $-\frac{٢}{٣}$، من (١): $\frac{٤}{٩}$أ = ٤، وبحلّ ذلك أ = ٩

إذن أ = ١ ، ر = ٢ أو أ = ٩ ، ر = $-\frac{٢}{٣}$

حاوِل

أوجد الحدَّ الأول والأساس للمتتابعات الهندسية الآتية.

١ المجموع من الحدِّ الأول حتى الثالث يساوى ٢١، والمجموع من الحدِّ الثالث حتى الخامس يساوى ٨٤

٢ المجموع من الحدِّ الأول حتى الثالث يساوى ٢٦، والمجموع من الحدِّ الأول حتى السادس يساوى ٧٢٨

٣ الحدُّ الثانى ٣، والمجموع من الحدِّ الأول حتى الثالث يساوى ١٣

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقشوا الإجابة.

تدرَّب

أوجد الحدَّ الأول والأساس للمتتابعات الهندسية الآتية.

١ المجموع من الحدِّ الأول حتى الثالث يساوى ٩، والمجموع من الحدِّ الرابع حتى السادس يساوى −٧٢

٢ المجموع من الحدِّ الأول حتى الثالث يساوى ٩، والمجموع من الحدِّ الثالث حتى الخامس يساوى ٣٦

٣ المجموع من الحدِّ الأول حتى الثالث يساوى ٧٨، والمجموع من الحدِّ الثالث حتى الخامس يساوى ٧٠٢

٤ مجموع الحدِّ الأول والحدِّ الثانى يساوى ٣، والمجموع من الحدِّ الأول حتى الرابع يساوى ٥١

٥ المجموع من الحدِّ الأول حتى الثالث يساوى ٦٥، والمجموع من الحدِّ الأول حتى السادس يساوى ١٨٢٠

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٦ مجموع الحدِّ الأول والحدِّ الثانى يساوى –٨، والمجموع من الحدِّ الأول حتى الرابع يساوى –٨٠

٧ الحدُّ الثانى ٦، والمجموع من الحدِّ الأول حتى الثالث يساوى ٢١

٨ الحدُّ الثالث ١٢، والمجموع من الحدِّ الأول حتى الثالث يساوى ٩

٩ الحدُّ الثالث ٢٠، والمجموع من الحدِّ الأول حتى الثالث يساوى ٣٥

★ التحدِّى

إذا كانت $م_{ن}$ مجموع أول ن حدًّا من متتابعة هندسية، وكان $م_{٨} = ٢٥٥،\ م_{٦} = ٦٣،$
$أ_{٨} - أ_{٧} = ٦٤،$ فأوجد $أ_{١٠}$.

تأمَّل

كيف يُغيِّر تغييرُ الأساس ر من قيمة أكبر من ١ إلى قيمة بين ٠ و١ تغييرًا جوهريًّا السلوكَ الواقعى الذى تُنمذجه المتتابعة الهندسية؟

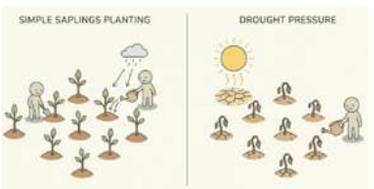
D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

٢-١١
الرياضيات

رمز التجميع Σ (١)

الفصل الثانى المتتابعات

المفهوم ٣ · التجميع



فى علم الأحياء البيئى، يتبع تعافى الغابات نمطًا رياضيًّا ذا قوّتين. فبعد حريق غابة، يزرع المحافظون على البيئة ٢٠٠ شتلة. ولتسريع الاستعادة يوسّعون جهودهم، فيضيفون ١٠٠ شتلة إلى الحصّة كل عام تالٍ (تزايد خطّى، متتابعة حسابية: ٢٠٠، ٣٠٠، ٤٠٠ ...). وفى الوقت نفسه تفرض الضغوط الطبيعية كالجفاف ثمنها: إذ لا ينجو إلا ٦٠٪ من الأشجار من عام إلى الذى يليه (اضمحلال أسّى، متتابعة هندسية أساسها ٠٫٦).

وحساب مجموع الأشجار الباقية بعد عقد كامل يقتضى تتبّع كيف تضمحلّ دورةُ الزراعة المتوسِّعة فى كل عام اضمحلالًا مستمرًّا. والرياضيات تُبسِّط هذه العملية المتداخلة برمز التجميع، فنُتيح إطارًا موحَّدًا لتحليل النموّ الخطّى والاضمحلال الأسّى معًا.

السؤال الموجِّه: كيف تُبسِّط العمليات على المتتابعات — كضرب الحدود أو جمع المجاميع المتداخلة — للوصول إلى قانون جبرى واضح؟

نواتج التعلّم

استعمال رمز التجميع فى التعبير عن المتتابعات الرياضية وحساب قيمها فى متتابعات مختلفة.

لاحِظ!

لمتتابعة حدُّها ن (الحدُّ العام) هو أ$_ن$، يُعبَّر عن المجموع من الحدِّ الأول حتى الحدِّ ن بالصورة

$$\sum_{ك=١}^{ن} أ_ك$$

المجموع من الحدِّ الأول حتى الرابع لمتتابعة حدُّها العام ٧ن.

مثال: $\sum_{ك=١}^{٤} ٧ك = ٧ + ١٤ + ٢١ + ٢٨$

مثال: المجموع من الحدِّ الأول حتى الحدِّ الثامن لمتتابعة حدُّها ن (الحدُّ العام) هو ٣ن:

غيِّر ن إلى ك

$$\sum_{ك=١}^{٨} ٣ك$$

استعِدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ اكتب مجاميع المتتابعات الآتية على صورة مجموع حدود دون استخدام Σ

(أ) $\sum_{ك=١}^{٥} ٢ك$ **(ب)** $\sum_{ك=١}^{٣} (ك^٢ - ٣)$ **(جـ)** $\sum_{ك=١}^{٤} ٣^ك$ **(د)** $\sum_{ك=١}^{٣} ٢$

٢ عبِّر عن التعبيرات الآتية باستخدام رمز التجميع Σ

(أ) $٣ + ٧ + ١١ + \ldots + (٤ن - ١)$ **(ب)** $٢^٦ + ٢^٧ + ٢^٨ + \ldots + ٢^{١٥}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

طريقة الحلّ

١

(أ) عوِّض بك = ١، ٢، ٣، ٤، ٥ فى ٢ك واكتبها حدودًا فى مجموع.

$$\sum_{ك=١}^{٥} ٢ك = ٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ١٠$$

(ب) عوِّض بك = ١، ٢، ٣ فى ك^{٢} – ٣ واكتبها حدودًا فى مجموع.

$$\sum_{ك=١}^{٣} (ك^{٢} - ٣) = -٢ + ١ + ٦$$

(جـ) عوِّض بك = ١، ٢، ٣، ٤ فى ٣^{ك} واكتبها حدودًا فى مجموع.

$$\sum_{ك=١}^{٤} ٣^{ك} = ٣ + ٩ + ٢٧ + ٨١$$

(د) المتتابعة التى حدُّها ن يساوى ٢ هى ٢، ٢، ٢، ...

$$\sum_{ك=١}^{٣} ٢ = ٢ + ٢ + ٢$$

٢

(أ) فى المسائل التى يكون فيها الحدُّ الأخير معبَّرًا عنه بدلالة ن، غيِّر ن إلى ك فقط واكتبها داخل ∑

(أسفل ∑ يُكتب ك = ١، وأعلاه ن)

$$\sum_{ك=١}^{ن} (٤ك - ١)$$

(ب) للتعبير برمز ∑ تحتاج الحدَّ العام أن ورقمَ الحدِّ الأخير.

أوجد الحدَّ العام أولًا: الحدُّ العام هو أن = (ن + ٥)^{٢}

ثم أوجد رقم الحدِّ الأخير: ١٥^{٢} هو الحدُّ العاشر. إذن

$$\sum_{ك=١}^{١٠} (ك + ٥)^{٢}$$

حاوِل

حلّ المسائل الآتية.

١ اكتب مجاميع المتتابعات الآتية على صورة مجموع حدود دون استخدام ∑

(أ) $\sum_{ك=١}^{٥} (٢ك + ١)$ **(ب)** $\sum_{ك=١}^{٣} (٣ك^{٢} + ٢)$ **(جـ)** $\sum_{ك=١}^{٤} ٢^{ك}$ **(د)** $\sum_{ك=١}^{٦} ٣$

٢ عبِّر عن التعبيرات الآتية باستخدام رمز التجميع ∑

(أ) ٥ + ٨ + ١١ + ... + (٣ن + ٢)

(ب) المجموع من الحدِّ الأول حتى الحدِّ ن للمتتابعة أن = ٢ن + ١

(جـ) ٤^{٢} + ٥^{٢} + ٦^{٢} + ... + ١٣^{٢}

(د) ٢ + ٥ + ٨ + ... + ٢٩

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ اكتب مجاميع المتتابعات الآتية على صورة مجموع حدود دون استخدام Σ

(أ) $\sum_{ك=١}^{٥} ٣ك$ **(ب)** $\sum_{ك=١}^{٤} (٤ك - ٢)$ **(ج)** $\sum_{ك=١}^{٥} (٢ك - ٣)$ **(د)** $\sum_{ك=١}^{٤} ك^{٢}$

(هـ) $\sum_{ك=١}^{٣} (٢ك^{٢} + ٣)$ **(و)** $\sum_{ك=١}^{٤} (ك^{٢} - ٢ك)$ **(ز)** $\sum_{ك=١}^{٣} ٣^{ك}$ **(ح)** $\sum_{ك=١}^{٣} (٥^{ك} + ٣)$

(ط) $\sum_{ك=١}^{٤} (٢^{ك} - ٣)$ **(ى)** $\sum_{ك=١}^{٤} ٥$ **(ك)** $\sum_{ك=١}^{٣} ٣$ **(ل)** $\sum_{ك=١}^{٥} ٤$

٢ عبِّر عن التعبيرات الآتية باستخدام رمز التجميع Σ

(أ) ١ + ٣ + ٥ + ... + (٢ن – ١)

(ب) ١ + ٧ + ٢٥ + ٧٩ + ... + (٣^{ن} – ٢)

(جـ) ١ + ٢ + ٤ + ٨ + ... + ٢$^{ن-١}$

(د) مجموع ن حدًا الأولى للمتتابعة أ$_{ن}$ = ٧ن – ١

(هـ) مجموع ن حدًا الأولى للمتتابعة أ$_{ن}$ = ٤ن + ٥

(و) مجموع ن حدًا الأولى للمتتابعة أ$_{ن}$ = ٣ن – ٢

(ز) ٧^{٢} + ٨^{٢} + ٩^{٢} + ... + ٢١^{٢}

(ح) ١٢^{٢} + ١٣^{٢} + ١٤^{٢} + ... + ١٨^{٢}

(ط) ١٠^{٢} + ١١^{٢} + ١٢^{٢} + ... + ٢٠^{٢}

(ى) ٨ + ١٦ + ٢٤ + ... + ٥٦

(ك) ٧ + ١٣ + ١٩ + ... + ٧٣

(ل) ٤ + ٩ + ١٤ + ... + ١١٩

★ التحدِّى

شركةٌ ناشئة فى التقنيات الخضراء توسّع شبكتها من محطات الشحن العاملة بالطاقة الشمسية فى منطقة حضرية. تُركِّب الشركة لوحًا شمسيًّا واحدًا فى (الأسبوع ١)، و فى (الأسبوع ٢)، و فى (الأسبوع ٣)، و لوحًا فى (الأسبوع). اكتب تعبيرًا رياضيًّا واحدًا باستخدام رمز التجميع يُمثِّل مجموع الألواح المُركَّبة تراكميًّا من الأسبوع ١ حتى الأسبوع .

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

١٢-٢ رمز التجميع Σ (٢)

الرياضيات

الفصل الثانى المتتابعات

لاحِظ!

قوانين رمز التجميع Σ

$$\sum_{ك=١}^{ن} جـ = نجـ \quad (جـ \text{ ثابت})$$

$$\sum_{ك=١}^{ن} ك = \frac{١}{٢}ن(ن+١) \qquad \sum_{ك=١}^{ن} ك^{٢} = \frac{١}{٦}ن(ن+١)(٢ن+١)$$

خواصّ رمز التجميع Σ (حيث ع ثابت لا يعتمد على ك)

$$\sum_{ك=١}^{ن} عأ_{ك} = ع\sum_{ك=١}^{ن} أ_{ك} \quad \text{مثال: } \sum_{ك=١}^{ن} ٥ك = ٥\sum_{ك=١}^{ن} ك$$

$$\sum_{ك=١}^{ن} (أ_{ك} + ب_{ك}) = \sum_{ك=١}^{ن} أ_{ك} + \sum_{ك=١}^{ن} ب_{ك} \quad \text{مثال: } \sum_{ك=١}^{ن} (ك^{٢}+٤) = \sum_{ك=١}^{ن} ك^{٢} + ٤\sum_{ك=١}^{ن}$$

$$\sum_{ك=١}^{ن} (أ_{ك} - ب_{ك}) = \sum_{ك=١}^{ن} أ_{ك} - \sum_{ك=١}^{ن} ب_{ك} \quad \text{مثال: } \sum_{ك=١}^{ن} (٢ك-٣) = ٢\sum_{ك=١}^{ن} ك - ٣\sum_{ك=١}^{ن}$$

استعِدّ

أوجد المجاميع الآتية.

(أ) $\sum_{ك=١}^{ن} (-٣)$ **(ب)** $\sum_{ك=١}^{ن} (٥ك+٤)$

(جـ) $١\times٣ + ٢\times٨ + ٣\times١٣ + \ldots + ن(٥ن-٢)$

(د) $\sum_{ك=١}^{٤} (٢ك-١)$

طريقة الحلّ

(أ) $\sum_{ك=١}^{ن} (-٣) = -٣ن$

(ب) $\sum_{ك=١}^{ن} (٥ك+٤)$

$= ٥\sum_{ك=١}^{ن} ك + ٤\sum_{ك=١}^{ن}$

$= ٥\times\frac{١}{٢}ن(ن+١) + ٤ن$

$= \frac{١}{٢}ن\{٥(ن+١)+٨\} = \frac{١}{٢}ن(٥ن+١٣)$

لا تفكّ الأقواس؛ أخرِج الكسر والعامل المشترك.

نواتج التعلّم

استعمال رمز التجميع فى التعبير عن المتتابعات الرياضية وحساب قيمها فى متتابعات مختلفة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

(ج) $١\times٣+٢\times٨+٣\times١٣+\ldots+ن(٥ن-٢)$

$=\sum_{ك=١}^{ن} ك(٥ك-٢)$ ← اكتبها برمز التجميع Σ

$=\sum_{ك=١}^{ن} (٥ك^{٢}-٢ك)$ ← افكُك التعبير داخل التجميع.

$=٥\sum_{ك=١}^{ن} ك^{٢}-٢\sum_{ك=١}^{ن} ك$

$=٥\times\frac{١}{٦}ن(ن+١)(٢ن+١)-٢\times\frac{١}{٢}ن(ن+١)$

$=\frac{٥}{٦}ن(ن+١)(٢ن+١)-ن(ن+١)$ ← لا تفكّ الأقواس: أخرِج الكسر والعامل المشترك.

$=\frac{١}{٦}ن(ن+١)\{٥(٢ن+١)-٦\}$

$=\frac{١}{٦}ن(ن+١)(١٠ن-١)$

(د) $\sum_{ك=١}^{٤} (٢ك-١)$

$=٢\sum_{ك=١}^{٤} ك-\sum_{ك=١}^{٤} ١$ ← عوّض بـ٤ عن ن فى القانون.

$=٢\times\frac{١}{٢}\times٤(٤+١)-٤$

$=١٦$

حاوِل

أوجد المجاميع الآتية.

(أ) $\sum_{ك=١}^{ن} ٣$

(ب) $\sum_{ك=١}^{ن} (٢ك-٣)$

(ج) $\sum_{ك=١}^{ن} (ك-١)(٣ك-١)$

(د) $١\times٣+٢\times٥+٣\times٧+\ldots+ن(٢ن+١)$

(هـ) $\sum_{ك=١}^{٥} (٣ك-٢)$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدرَّب

أوجد المجاميع الآتية.

(أ) $\sum_{ك=١}^{ن} ٦$ **(ب)** $\sum_{ك=١}^{ن} (-٤)$ **(جـ)** $\sum_{ك=١}^{ن} ١$

(د) $\sum_{ك=١}^{ن} (٤ك - ١)$ **(هـ)** $\sum_{ك=١}^{ن} (٣ك + ٢)$ **(و)** $\sum_{ك=١}^{ن} (٦ك - ٣)$

(ز) $\sum_{ك=١}^{ن} ك(ك - ٢)$ **(ح)** $\sum_{ك=١}^{ن} ك(٢ك - ٢)$ **(ط)** $\sum_{ك=١}^{ن} (ك - ١)^{٢}$

(م) $\sum_{ك=١}^{٢٠} (٢ك - ٧)$ **(ن)** $\sum_{ك=١}^{٨} (٤ك + ٥)$ **(س)** $\sum_{ك=١}^{١٠} (٢ك - ١)$

(ى) $١ \times ٤ + ٢ \times ٥ + ٣ \times ٦ + \ldots + ن(ن + ٣)$

(ك) $١ \times ٥ + ٢ \times ٨ + ٣ \times ١١ + \ldots + ن(٣ن + ٢)$

(ل) $٢ \times ٥ + ٣ \times ٦ + ٤ \times ٧ + \ldots + (ن + ١)(ن + ٤)$

★ التحدّى

أوجد المجموع الآتى:

$$\sum_{ح=٤}^{٨} (ح^{٢} + ح + ٥)$$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢-١٣ رمز التجميع Σ (٣)

الرياضيات

الفصل الثانى المتتابعات

لاحظ!

قوانين رمز التجميع Σ

$$\sum_{ك=١}^{ن} ك^{٣} = \left\{ \frac{١}{٢} ن(ن+١) \right\}^{٢}$$

مجموع المتتابعة الهندسية

$\sum_{ك=١}^{ن} أ ر^{ك-١}$ هو المجموع من الحدِّ الأول حتى الحدِّ ن لمتتابعة هندسية حدُّها الأول أ وأساسها ر، إذن:

عندما ر < ١: $\sum_{ك=١}^{ن} أ ر^{ك-١} = \frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$

وعندما ر > ١: $\sum_{ك=١}^{ن} أ ر^{ك-١} = \frac{أ(ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$

المتتابعة المُعبَّر عنها بأن $ح_{ن} = ر^{ن-١}$ يمكن كتابتها أن $= ١ \times ر^{ن-١}$، فهى متتابعة هندسية حدُّها الأول ١ وأساسها ر.

مثال: أن $= ٤^{ن-١} = ١ \times ٤^{ن-١}$ الحدُّ الأول: ١، الأساس: ٤

والمتتابعة المُعبَّر عنها بأن $ح_{ن} = ر^{ن}$ يمكن كتابتها أن $= ر \times ر^{ن-١}$، فهى متتابعة هندسية حدُّها الأول ر وأساسها ر.

مثال: أن $= ٤^{ن} = ٤ \times ٤^{ن-١}$ الحدُّ الأول: ٤، الأساس: ٤

نواتج التعلّم

استعمال رمز التجميع فى التعبير عن المتتابعات الرياضية وحساب قيمها فى متتابعات مختلفة.

تذكَّرها بأنها «مربَّع $\sum_{ك=١}^{ن} ك$».

استعِدّ

أوجد المجاميع الآتية.

(أ) $\sum_{ك=١}^{ن} ك^{٢}(ك+١)$ (ب) $\sum_{ك=١}^{ن} ٢ \times (-٣)^{ك-١}$ (جـ) $\sum_{ك=١}^{ن} ٤^{ك}$

طريقة الحلّ

(أ) $\sum_{ك=١}^{ن} ك^{٢}(ك+١)$

افكُك التعبير داخل التجميع.

$= \sum_{ك=١}^{ن} (ك^{٣} + ك^{٢})$

$= \left\{ \frac{١}{٢} ن(ن+١) \right\}^{٢} + \frac{١}{٦} ن(ن+١)(٢ن+١)$

لا تفكّ الأقواس: أخرِج الكسر والعامل المشترك.

$= \frac{١}{٤} ن^{٢}(ن+١)^{٢} + \frac{١}{٦} ن(ن+١)(٢ن+١)$

$= \frac{١}{١٢} ن(ن+١)\{٣ن(ن+١) + ٢(٢ن+١)\}$

حلِّل إلى عوامل إن أمكن.

$= \frac{١}{١٢} ن(ن+١)(٣ن^{٢} + ٧ن + ٢)$

$= \frac{١}{١٢} ن(ن+١)(ن+٢)(٣ن+١)$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

(ب) $\sum_{ك=١}^{ن} ٢ \times (-٣)^{ك-١}$ ..... الحدُّ الأول: ٢، الأساس: −٣

$= \frac{٢\{١ - (-٣)^{ن}\}}{١ - (-٣)} = \frac{٢\{١ - (-٣)^{ن}\}}{٤}$

$= \frac{١ - (-٣)^{ن}}{٢}$

(ج) $\sum_{ك=١}^{ن} ٤^{ك}$

$= \sum_{ك=١}^{ن} ٤ \times ٤^{ك-١}$ ..... اكتبها على الصورة $أ_{ر}^{ن-١}$.

$= \frac{٤(٤^{ن} - ١)}{٤ - ١}$ ..... الحدُّ الأول: ٤، الأساس: ٤

$= \frac{٤(٤^{ن} - ١)}{٣}$

حاوِل

أوجد المجاميع الآتية.

(أ) $\sum_{ك=١}^{ن} ك^{٢}(ك - ٢)$

(ب) $\sum_{ك=١}^{ن} ٣ \times (-٢)^{ك-١}$

(ج) $\sum_{ك=١}^{ن} ٤^{ك-١}$

(د) $\sum_{ك=١}^{ن} (-٥)^{ك}$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا الإجابة.

تدرَّب

أوجد المجاميع الآتية.

(أ) $\sum_{ك=١}^{ن} ك(ك^{٢} - ١)$

(ب) $\sum_{ك=١}^{ن} ك^{٢}(ك + ٢)$

(ج) $\sum_{ك=١}^{ن} ك(ك^{٢} + ٢)$

(د) $\sum_{ك=١}^{ن} ك^{٢}(ك - ٣)$

(هـ) $\sum_{ك=١}^{ن} ٦ \times ٣^{ك-١}$

(و) $\sum_{ك=١}^{ن} ٢ \times (-١)^{ك-١}$

(ز) $\sum_{ك=١}^{ن} ٤ \times ٢^{ك-١}$

(ح) $\sum_{ك=١}^{ن} ٨ \times (-٣)^{ك-١}$

(ط) $\sum_{ك=١}^{ن} ٣^{ك-١}$

(ى) $\sum_{ك=١}^{٤} (-٢)^{ك-١}$

(ك) $\sum_{ك=١}^{ن} (-٢)^{ك-١}$

(ل) $\sum_{ك=١}^{٣} ٣^{ك-١}$

(م) $\sum_{ك=١}^{ن} (-٣)^{ك}$

(ن) $\sum_{ك=١}^{٥} ٢^{ك}$

(س) $\sum_{ك=١}^{ن} ٢^{ك}$

(ع) $\sum_{ك=١}^{٤} (-٣)^{ك}$

★ التحدّى

أوجد المجموع الآتى:

$$\sum_{ح=٥}^{٩} (٢ح + ٧)$$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

١٤-٢
الرياضيات

مجموع المتتابعات الكسرية

الفصل الثانى المتتابعات

نواتج التعلّم

حساب مجموع المتتابعات الكسرية باستخدام تحليل الكسر.

لاحظ!

خطوات إيجاد مجموع المتتابعات الكسرية

١ حوِّل كل حدٍّ باستخدام القانون الآتى:

$\frac{١}{أ ب} = \frac{١}{ب - أ}\left(\frac{١}{أ} - \frac{١}{ب}\right)$ مثال: $\frac{١}{٤ \times ١٠} = \frac{١}{٦}\left(\frac{١}{٤} - \frac{١}{١٠}\right)$

٢ اختصر الحدود التى مجموعها صفر، واحسب الباقى.

للمتتابعات التى تحوى $\sqrt{\ }$ فى المقام، اجعل المقام نسبيًّا أولًا.

وعندما يُعبَّر عن مجموع متتابعة فيها كسور أو $\sqrt{\ }$ برمز التجميع Σ، أعِد كتابته على صورة مجموع حدود.

استعِدّ

أوجد المجاميع الآتية.

(أ) $\frac{١}{٢ \times ٥} + \frac{١}{٥ \times ٨} + \frac{١}{٨ \times ١١} + \ldots + \frac{١}{(٣ن - ١)(٣ن + ٢)}$

(ب) $\sum_{ك = ١}^{ن} \frac{١}{\sqrt{ك + ٢} + \sqrt{ك + ١}}$

طريقة الحلّ

(أ) $\frac{١}{٢ \times ٥} + \frac{١}{٥ \times ٨} + \frac{١}{٨ \times ١١} + \ldots + \frac{١}{(٣ن - ١)(٣ن + ٢)}$

حوِّل كل حدٍّ باستخدام القانون.

$= \frac{١}{٣}\left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٥}\right) + \frac{١}{٣}\left(\frac{١}{٥} - \frac{١}{٨}\right) + \frac{١}{٣}\left(\frac{١}{٨} - \frac{١}{١١}\right) + \ldots + \frac{١}{٣}\left(\frac{١}{٣ن - ١} - \frac{١}{٣ن + ٢}\right)$

أخرِج $\frac{١}{٣}$ عاملًا مشتركًا.

$= \frac{١}{٣}\left\{\left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٥}\right) + \left(\frac{١}{٥} - \frac{١}{٨}\right) + \ldots + \left(\frac{١}{٣ن - ١} - \frac{١}{٣ن + ٢}\right)\right\}$

اختصر الحدود التى مجموعها صفر، واحسب الباقى.

$= \frac{١}{٣}\left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣ن + ٢}\right)$

$= \frac{ن}{٢(٣ن + ٢)}$

(ب) $\sum_{ك = ١}^{ن} \frac{١}{\sqrt{ك + ٢} + \sqrt{ك + ١}}$

اجعل المقام نسبيًّا أولًا.

$= \sum_{ك = ١}^{ن} \frac{\sqrt{ك + ٢} - \sqrt{ك + ١}}{(\sqrt{ك + ٢} + \sqrt{ك + ١})(\sqrt{ك + ٢} - \sqrt{ك + ١})}$

$= \sum_{ك = ١}^{ن} \frac{\sqrt{ك + ٢} - \sqrt{ك + ١}}{(ك + ٢) - (ك + ١)}$

أعِد كتابته على صورة مجموع حدود.

$= \sum_{ك = ١}^{ن} (\sqrt{ك + ٢} - \sqrt{ك + ١})$

اختصر الحدود التى مجموعها صفر، واحسب الباقى.

$= (\cancel{\sqrt{٣}} - \sqrt{٢}) + (\cancel{\sqrt{٤}} - \cancel{\sqrt{٣}}) + (\cancel{\sqrt{٥}} - \cancel{\sqrt{٤}}) + (\cancel{\sqrt{٦}} - \cancel{\sqrt{٥}}) + \ldots + (\sqrt{ن + ٢} - \sqrt{ن + ١})$

$= \sqrt{ن + ٢} - \sqrt{٢}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاوِل

أوجد المجاميع الآتية.

(أ) $\frac{١}{٢\times٣}+\frac{١}{٣\times٤}+\frac{١}{٤\times٥}+\ldots+\frac{١}{(ن+١)(ن+٢)}$

(ب) $\frac{١}{١\times٣}+\frac{١}{٣\times٥}+\frac{١}{٥\times٧}+\ldots+\frac{١}{(٢ن-١)(٢ن+١)}$

(جـ) $\frac{١}{٤\times٦}+\frac{١}{٥\times٧}+\frac{١}{٦\times٨}+\ldots+\frac{١}{(ن+٣)(ن+٥)}$

(د) $\sum_{ك=١}^{ن}\frac{١}{\sqrt{ك}+\sqrt{ك+١}}$

تدرّب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد المجاميع الآتية.

(أ) $\frac{١}{١\times٢}+\frac{١}{٢\times٣}+\frac{١}{٣\times٤}+\ldots+\frac{١}{ن(ن+١)}$

(ب) $\frac{١}{٢\times٤}+\frac{١}{٤\times٦}+\frac{١}{٦\times٨}+\ldots+\frac{١}{٢ن(٢ن+٢)}$

(جـ) $\frac{١}{١\times٣}+\frac{١}{٢\times٤}+\frac{١}{٣\times٥}+\ldots+\frac{١}{ن(ن+٢)}$

(د) $\sum_{ك=١}^{ن}\frac{١}{\sqrt{ك}+\sqrt{ك-١}}$

(هـ) $\frac{١}{\sqrt{٢}+\sqrt{٣}}+\frac{١}{\sqrt{٣}+\sqrt{٤}}+\frac{١}{\sqrt{٤}+\sqrt{٥}}+\ldots+\frac{١}{\sqrt{ن+١}+\sqrt{ن+٢}}$

٢ أوجد المجاميع الآتية.

(أ) $\frac{١}{٣\times٤}+\frac{١}{٤\times٥}+\frac{١}{٥\times٦}+\ldots+\frac{١}{(ن+٢)(ن+٣)}$

(ب) $\frac{١}{١\times٤}+\frac{١}{٤\times٧}+\frac{١}{٧\times١٠}+\ldots+\frac{١}{(٣ن-٢)(٣ن+١)}$

(جـ) $\frac{١}{١\times٧}+\frac{١}{٤\times١٠}+\frac{١}{٧\times١٣}+\ldots+\frac{١}{(٣ن-٢)(٣ن+٤)}$

(د) $\sum_{ك=١}^{ن}\frac{١}{\sqrt{٣ك-١}+\sqrt{٣ك+١}}$

(هـ) $\frac{١}{\sqrt{١}+\sqrt{٢}}+\frac{١}{\sqrt{٢}+\sqrt{٣}}+\frac{١}{\sqrt{٣}+\sqrt{٤}}+\ldots+\frac{١}{\sqrt{ن}+\sqrt{ن+١}}$

★ التحدّى

أوجد بالخطوات:

$$\sum_{ح=١}^{٣٠}\frac{١}{ح(ح+٢)}$$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢-١٥
الرياضيات

مجموع (متتابعة حسابية)×(متتابعة هندسية)

الفصل الثانى المتتابعات

لاحظ!

لإيجاد المجموع م لـ (متتابعة حسابية) × (متتابعة هندسية بالأساس ر)، استخدم م – رم

استعِدّ

أوجد المجموع الآتى م.

$م = ١ \times ٣ + ٣ \times ٥ + ٣^{٢} \times ٧ + ٣^{٣} \times ٩ + \cdots + (٢ن + ١) \times ٣^{ن - ١}$

طريقة الحلّ

المجموع المطلوب إيجاده هو مجموع (متتابعة حسابية بالحدّ الأول ٣ والأساس ٢) × (متتابعة هندسية بالحدّ الأول ١ والأساس ٣).

$م = ١ \times ٣ + ٣ \times ٥ + ٣^{٢} \times ٧ + ٣^{٣} \times ٩ + \cdots + (٢ن + ١) \times ٣^{ن - ١}$

اضرب طرفى المعادلة فى الأساس ٣ للمتتابعة الهندسية.

$٣م = ٣ \times ٣ + ٣^{٢} \times ٥ + ٣^{٣} \times ٧ + ٣^{٤} \times ٩ + \cdots + (٢ن + ١) \times ٣^{ن}$

اطرح طرفى المعادلتين.

$م = ١ \times ٣ + ٣ \times ٥ + ٣^{٢} \times ٧ + ٣^{٣} \times ٩ + \cdots + (٢ن + ١) \times ٣^{ن - ١}$

$-) \quad ٣م = ٣ \times ٣ + ٣^{٢} \times ٥ + ٣^{٣} \times ٧ + \cdots + (٢ن - ١) \times ٣^{ن - ١} + (٢ن + ١) \times ٣^{ن}$

$-٢م = ١ \times ٣ + ٢ \times ٣ + ٢ \times ٣^{٢} + ٢ \times ٣^{٣} + \cdots + ٢ \times ٣^{ن - ١} - (٢ن + ١) \times ٣^{ن}$

$-٢م = ٣ + \frac{٢(٣^{ن} - ١)}{٣ - ١} - ٢ - (٢ن + ١) \times ٣^{ن}$

$-٢م = ٣^{ن} - (٢ن + ١) \times ٣^{ن}$

$-٢م = -٢ن \times ٣^{ن}$

$م = ن \times ٣^{ن}$

حاوِل

أوجد المجموع الآتى م.

$م = ١ \times ٢ + ٣ \times ٣ + ٣ \times ٤ + ٣^{٢} \times ٥ + \cdots + (ن + ١) \times ٣^{ن - ١}$

نواتج التعلّم

يوجد مجموع حاصل ضرب متتابعة حسابية فى متتابعة هندسية.

أخطاء شائعة

$م = ١ \times ٣ + ٣ \times ٥ + ٣^{٢} \times ٧ + \cdots + (٢ن - ١) \times ٣^{ن - ١} +$

$٣م = ٣ \times ٣ + ٣ \times ٥ + ٣^{٢} \times ٧ + \cdots + (٢ن - ١) \times ٣^{ن - ١} +$

$-٢م = ١ \times ٣ + ٣ \times ٢ + ٣^{٢} \times ٢ + \cdots + ٢ \times ٣^{ن - ١} + (٢ن + ١) \times ٣^{ن}$

لقد نسيت تغيير إشارة الحدّ الأخير إلى السالب عند طرح ٣م من م.

استخدم م – رم.

اكتب المعادلات بحيث تتوافق قوى الأساس عموديًا.

أضف حدودًا لتسهيل عملية الطرح.

المجموع من الحدّ الثانى إلى الحدّ ن لمتتابعة هندسية بالحدّ الأول ٢ والأساس ٣. (المجموع من الحدّ الأول إلى الحدّ ن) – (الحدّ الأول)

اقسم طرفى المعادلة على –٢ (انتبه إلى الإشارة).

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدرَّب

أوجد المجاميع الآتية م.

١ م = ١ × ١ + ٢ × ٢ + ٣ × ٢٢ + ٤ × ٣٢ + ... + ن × ٢ن − ١

٢ م = ١ × ٣ + ٣ × ٣٢ + ٥ × ٣٣ + ٧ × ٣٤ + ... + (٢ن − ١) × ٣ن

★ التحدِّى

أوجد المجموع الآتى ٥ ، ٥ + ٩ ، ٥ + ٩ + ١٣ ، ٥ + ٩ + ١٣ + ١٧ ، ... ... + (٤ك + ١)

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢-١٦
الرياضيات

متتابعة حدّها العام مجموع

الفصل الثانى المتتابعات

لاحِظ!

احسب الحدّ رقم ك فى متتابعة يُعبَّر عن كل حدٍّ فيها بصورة مجموع باستخدام رمز التجميع Σ.

نواتج التعلّم

يستنتج مجموع المتتابعة إذا كان حدّها العام مجموع بعض حدودها، ويربط بين مجموع المتتابعة وحدّها العام.

استعِدّ

حلّ المسائل الآتية للمتتابعة ٣، ٣ + ٥، ٣ + ٥ + ٧، ٣ + ٥ + ٧ + ٩، ...

(أ) أوجد الحدّ رقم ك.

(ب) أوجد المجموع من الحدّ الأول حتى الحدّ ن.

طريقة الحلّ

(أ) الحدّ رقم ك فى هذه المتتابعة هو:

أنشئ قانونًا مع مراعاة الانتظام.

$أ_ك = ٣ + ٥ + ٧ + \cdots + (٢ك + ١)$

احسب باستخدام رمز التجميع Σ.

$= \sum_{ي=١}^{ك} (٢ي + ١)$

بما أنها المجموع من الحدّ الأول إلى الحدّ ك، نستخدم المتغيّر ي.

$= ٢ \times \frac{١}{٢} ك(ك + ١) + ك$

حساب ذلك يعطى $أ_ن = ك(ك + ٢)$

(ب) من **(أ)**، المجموع $م_ن$ من الحدّ الأول حتى الحدّ ن هو:

ضع $أ_ك$ داخل Σ. $م_ن = \sum_{ك=١}^{ن} أ_ك$

$م_ن = \sum_{ك=١}^{ن} ك(ك + ٢)$

$= \sum_{ك=١}^{ن} (ك^٢ + ٢ك) = \frac{١}{٦} ن(ن + ١)(٢ن + ١) + ٢ \times \frac{١}{٢} ن(ن + ١)$

حساب ذلك يعطى $م_ن = \frac{١}{٦} ن(ن + ١)(٢ن + ٧)$

حاوِل

حلّ المسائل الآتية للمتتابعة ١، ١ + ٣، ١ + ٣ + ٥، ١ + ٣ + ٥ + ٧، ...

١ أوجد الحدّ رقم ك.

٢ أوجد المجموع من الحدّ الأول حتى الحدّ ن.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ حلّ المسائل الآتية للمتتابعة ١ ، ١ + ٥ ، ١ + ٥ + ٩ ، ١ + ٥ + ٩ + ١٣ ، ...

(أ) أوجد الحدّ رقم ك.

(ب) أوجد المجموع من الحدّ الأول حتى الحدّ ن.

٢ حلّ المسائل الآتية للمتتابعة ٢ ، ٢ + ٤ ، ٢ + ٤ + ٦ ، ٢ + ٤ + ٦ + ٨ ، ...

(أ) أوجد الحدّ رقم ك.

(ب) أوجد المجموع من الحدّ الأول حتى الحدّ ن.

★ التحدِّى

أوجد الحدّ العام للمتتابعة {أن} التى مجموع أول ن حدًّا من حدودها مُعطًى بالقانون

م$_{ن}$ = ٢ن^{٢} + ٥ن

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢-١٧ مجموع المتتابعة والحدّ العام

الفصل الثانى المتتابعات

الرياضيات

لاحظ!

لتكن $م_ن$ المجموع من الحدّ الأول $أ_١$ إلى الحدّ ن للمتتابعة $\{أ_ن\}$.

عندما ن ≥ ٢، $أ_ن = م_ن - م_{ن-١}$.

الحدّ الأول هو $أ_١ = م_١$.

تحقّق ممّا إذا كان $أ_ن$ المحصول عليه بشرط ن ≥ ٢ يصحّ أيضًا للحدّ الأول بالتعويض ن = ١ فى قانون $أ_ن$.

إذا صحّ ⇐ اترك $أ_ن$ كما هو.

إذا لم يصحّ ⇐ اكتب $أ_١$ و$أ_ن$ معًا.

مثال: إذا كان $أ_ن$ المحصول عليه من $م_ن - م_{ن-١}$ هو $أ_ن = ٢ن^٢ - ٢ن + ١$ ..... (١)،

وكان $أ_١$ المحصول عليه من $م_١$ هو $أ_١ = ٠$ ..... (٢)، فالتعويض بـ ن = ١ فى (١) يعطى $أ_١ = ١$، وهو لا يصحّ.

إذن، الحدّ العام هو $أ_١ = ٠$، و$أ_ن = ٢ن^٢ - ٢ن + ١$ عندما ن ≥ ٢.

نواتج التعلّم

يستنتج مجموع المتتابعة إذا كان حدّها العام مجموع بعض حدودها، ويربط بين مجموع المتتابعة وحدّها العام.

$$أ_ن + أ_{ن-١} + \cdots + أ_٢ + أ_١ = م_ن + م_{ن-١}$$

أخطاء شائعة

$أ_ن = م_ن - م_{ن-١}$

$= (ن^٢ - ٣ن) - \{(ن - ١)^٢$

$-٣(ن - ١)\} = ٢ن - ٤$

إذن، الحدّ العام هو

$أ_ن = ٢ن - ٤$

لقد أغفلت الشرط المسبق ن ≥ ٢ وأخفقت فى إجراء التحقّق النهائى عند ن = ١

استعِدّ

أوجد الحدّ العام للمتتابعة $\{أ_ن\}$ حيث المجموع $م_ن$ من الحدّ الأول إلى الحدّ ن مُعطًى بالقوانين الآتية.

(أ) $م_ن = ن^٢ - ٣ن$ **(ب)** $م_ن = ٥^ن - ١$

طريقة الحلّ

(أ) عندما ن ≥ ٢،

$أ_ن = م_ن - م_{ن-١}$

$= (ن^٢ - ٣ن) - \{(ن - ١)^٢ - ٣(ن - ١)\} = ٢ن - ٤$ ..... (١)

الحدّ الأول هو $أ_١ = م_١$

$= ١^٢ - ٣ \times ١ = -٢$ ..... (٢)

من (١) و(٢)، $أ_ن = ٢ن - ٤$ يصحّ أيضًا عندما ن = ١

إذن، الحدّ العام هو $أ_ن = ٢ن - ٤$

يُعدّ ذلك استنتاجًا إن لم يُكتب.

$م_{ن-١} = (ن - ١)^٢ - ٣(ن - ١)$

يُعدّ ذلك استنتاجًا إن لم يُكتب.

يُعدّ ذلك استنتاجًا إن لم يُكتب. تحقّق بالتعويض ن = ١ فى القانون (١).

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

(ب) عندما ن ≥ ٢،

أ$_{ن}$ = م$_{ن}$ – م$_{ن-١}$

= (٥^{ن} – ١) – (٥$^{ن-١}$ – ١)

= ٥^{ن} – ٥$^{ن-١}$

= ٥ × ٥$^{ن-١}$ – ١ × ٥$^{ن-١}$

= ٤ × ٥$^{ن-١}$ ..... (١)

الحدّ الأول هو أ$_{١}$ = م$_{١}$

= ٥^{١} – ١ = ٤ ..... (٢)

من (١) و(٢)، أ$_{ن}$ = ٤ × ٥$^{ن-١}$ يصحّ أيضًا عندما ن = ١

إذن، الحدّ العام هو أ$_{ن}$ = ٤ × ٥$^{ن-١}$

يُعدّ ذلك استنتاجًا إن لم يُكتب.

٥^{ن} = ٥^{١} × ٥$^{ن-١}$

يُعدّ ذلك استنتاجًا إن لم يُكتب.

يُعدّ ذلك استنتاجًا إن لم يُكتب.

حاوِل

أوجد الحدّ العام للمتتابعة {أ$_{ن}$} حيث المجموع م$_{ن}$ من الحدّ الأول إلى الحدّ ن مُعطًى بالقوانين الآتية.

١ م$_{ن}$ = ٢ن^{٢} + ٥ن

٢ م$_{ن}$ = ٣^{ن} – ١

٣ م$_{ن}$ = ن^{٣} + ٢ن + ٦

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا الإجابة.

تدرَّب

أوجد الحدّ العام للمتتابعة {أ$_{ن}$} حيث المجموع م$_{ن}$ من الحدّ الأول إلى الحدّ ن مُعطًى بالقوانين الآتية.

١ م$_{ن}$ = ن^{٢}

٢ م$_{ن}$ = ن^{٢} – ٤ن

٣ م$_{ن}$ = ن^{٢} + ٢ن – ١

٤ م$_{ن}$ = ٢^{ن} – ١

٥ م$_{ن}$ = ٥^{ن} – ٢

٦ م$_{ن}$ = ٧^{ن} – ١

٧ م$_{ن}$ = ن^{٣} – ١

٨ م$_{ن}$ = ٢$^{ن+٢}$ – ٣

★ التحدِّى

أوجد الحدّ العام للمتتابعة {أ$_{ن}$} حيث المجموع م$_{ن}$ من الحدّ الأول إلى الحدّ ن مُعطًى بالقانون الآتى.

م$_{ن}$ = ٣$^{ن+١}$ – ٢ن + ١

تأمَّل

كيف غيّر تفكيكُ متتابعة مركّبة معقّدة (حسابية×هندسية) إلى أجزائها الأبسط (المكوّن الحسابى والمكوّن الهندسى) نظرتَك إلى التعامل مع المسائل متعدّدة الخطوات المُربِكة فى الحياة أو فى العلوم؟

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢-١٨
الرياضيات

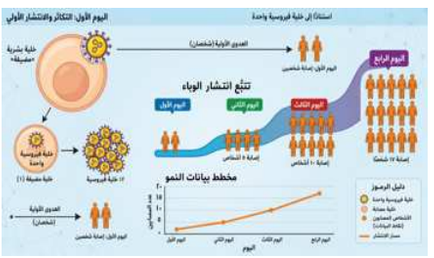
متتابعات الفروق

الفصل الثانى المتتابعات

نواتج التعلّم

يوجد الحدّ العام باستعمال متتابعات الفروق.

المفهوم ٤٠ متتابعات متقدّمة



تأمّل كيف يتكاثر فيروس واحد داخل جسم مصاب، وكيف تتابع وزارة الصحة انتشار وباء. ففى اليوم الأول قد يصاب شخصان، وفى اليوم الثانى ٥ أشخاص، وفى اليوم الثالث ١٠، وفى اليوم الرابع ١٧. وإذا دقّقت النظر فى التغيّر يومًا بعد يوم، وجدت أن الفيروس لا ينتشر بسرعة ثابتة، وأن تسارع انتشاره يسير على نمط خفىّ يمكن التنبّؤ به. وبتحليل طبقات التغيّر هذه يتنبّأ علماء الأوبئة بذروة الإصابات، ويوزّعون موارد المستشفيات توزيعًا فعّالًا.

السؤال الموجّه: كيف نكتشف نمطًا ثابتًا خفيًّا فى متتابعة عددية والفروق الأولى بين حدودها تتغيّر باستمرار؟

لاحظ!

- المتتابعة المكوَّنة من الفروق بين الحدود المتجاورة تُسمى **متتابعة الفروق**.

مثال: متتابعة الفروق للمتتابعة ١٠، ٨، ٤، −٢، −١٠، ... هى
−٢، −٤، −٦، −٨، ...

- بالنسبة للمتتابعات التى يصعب تقدير حدّها العام، يمكن أحيانًا إيجاده من الحدّ الأول ومتتابعة الفروق.

عندما ن ≥ ٢، $أ_ن = أ_١ + \sum_{ك=١}^{ن-١} ب_ك$

تحقّق ممّا إذا كانت تصحّ عند ن = ١ بالتعويض ن = ١ فى قانون $أ_ن$ ومقارنتها بـ $أ_١$ المعطى.

$أ_١ ، أ_٢ ، أ_٣ ، ... ، أ_{ن-١} ، أ_ن$

$ب_١ \quad ب_٢ \quad ب_{ن-١}$

$أ_ن = أ_١ + ب_١ + ب_٢ + ... + ب_{ن-١}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

استعِدّ

أوجد الحدّ العام للمتتابعات الآتية {أن}.

١ ٢، ٥، ١٢، ٢٣، ٣٨، ٥٧، ...

٢ ٢، ٣، ٦، ١٥، ٤٢، ١٢٣، ...

طريقة الحلّ

١ لتكن {بن} متتابعة الفروق للمتتابعة المعطاة.

{أن} : ٢، ٥، ١٢، ٢٣، ٣٨، ٥٧، ...

{بن} : ٣، ٧، ١١، ١٥، ١٩، ...

بما أنّ {بن} متتابعة حسابية حدّها الأول ٣ وأساسها ٤:

$ب_ن = ٣ + (ن - ١) \times ٤$

$= ٤ن - ١$

إذن، عندما ن ≥ ٢،

$أ_ن = أ_١ + \sum_{ك=١}^{ن-١} ب_ك$

$= ٢ + \sum_{ك=١}^{ن-١} (٤ك - ١) = ٢ + ٤ \times \frac{١}{٢}(ن - ١)\{(ن - ١) + ١\} - (ن - ١)$

$= ٢ + ٢ن(ن - ١) - (ن - ١) = ٢ + ٢ن^٢ - ٢ن - ن + ١ = ٢ن^٢ - ٣ن + ٣$

يصحّ هذا القانون أيضًا عندما ن = ١

إذن، $أ_ن = ٢ن^٢ - ٣ن + ٣$

يُعدّ ذلك استنتاجًا إن لم يُكتب.

يُعدّ ذلك استنتاجًا إن لم يُكتب.

استخدم القانون مع الأخذ بعين الاعتبار أنه مجموع حتى الحدّ (ن – ١).

$\sum_{ك=١}^{ن} (٤ك - ١) = ٤ \times \frac{١}{٢}ن(ن + ١) - ن$

يُعدّ ذلك استنتاجًا إن لم يُكتب.
تأكّد من تعويض ن = ١ في الصيغة المستنتجة لـ $أ_ن$ للتحقّق من أنها تساوي $أ_١$ المعطى.

$أ_١ = ٢ \times ١^٢ - ٣ \times ١ + ٣ = ٢$

أخطاء شائعة

$أ_ن = أ_١ + \sum_{ك=١}^{ن-١} ب_ك$

$= ٢ + \sum_{ك=١}^{ن-١} (٤ك - ١)$

$= ٢ + ٤ \times \frac{١}{٢}ن(ن + ١) - ن$

$= ٢ + ٢ن^٢ + ٢ن - ن$

$= ٢ن^٢ + ن + ٢$

لقد فاتك استبدال جميع حالات ن بـ ن – ١ في القانون.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢ لتكن {بن} متتابعة الفروق للمتتابعة المعطاة.

{أن} : ٢، ٣، ٦، ١٥، ٤٢، ١٢٣، ...

{بن} : ١، ٣، ٩، ٢٧، ٨١، ...

بما أنّ {بن} متتابعة هندسية حدّها الأول ١ وأساسها ٣:

$ب_ن = ١ \times ٣^{ن-١}$

إذن، عندما ن ≥ ٢،

$$أ_ن = أ_١ + \sum_{ك=١}^{ن-١} ب_ك$$

$$= ٢ + \sum_{ك=١}^{ن-١} ١ \times ٣^{ك-١} = ٢ + \frac{٣^{ن-١} - ١}{٣ - ١} = \frac{٤ + ٣^{ن-١} - ١}{٢} = \frac{٣^{ن-١} + ٣}{٢}$$

يصحّ هذا القانون أيضًا عندما ن = ١

إذن، $أ_ن = \frac{٣^{ن-١} + ٣}{٢}$

يُعدّ ذلك استنتاجًا إن لم يُكتب.

هذه الصورة مقبولة لأنه سيُستخدم Σ.

يُعدّ ذلك استنتاجًا إن لم يُكتب.

استخدم القانون مع الأخذ بعين الاعتبار أنه مجموع حتى الحدّ (ن – ١).

$$\sum_{ك=١}^{ن} ١ \times ٣^{ك-١} = \frac{٣^{ن} - ١}{٣ - ١}$$

يُعدّ ذلك استنتاجًا إن لم يُكتب.

حاوِل

أوجد الحدّ العام للمتتابعات الآتية {أن}.

(أ) ٢، ١٠، ٢٤، ٤٤، ٧٠، ١٠٢، ...

(ب) ٥، ٧، ١١، ١٩، ٣٥، ...

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا الإجابة.

تدرَّب

أوجد الحدّ العام للمتتابعات الآتية {أن}.

(أ) ١، ٢، ٥، ١٤، ٤١، ١٢٢، ...

(ب) ٥، ٨، ٩، ٨، ٥، ٠، ...

(ج) ٢، ٣، ١، ٥، –٣، ١٣، ...

(د) ١، ٦، ١٥، ٢٨، ٤٥، ٦٦، ...

(هـ) ٥، ٤، ٧، –٢، ٢٥، –٥٦، ...

★ التحدّى

يتابع فريق أورام كتلة نسيجية ستّة أسابيع، ويسجّل حجمها بالمليمتر المكعّب مم^٣ كالآتى:

١، ٣، ٧، ١٣، ٢١، ٣١، ... أوجد قانونها العام أن. وإذا تجاوز الحجم ١٣٠ مم^٣ فى الأسبوع ١٢، لزم إجراء جراحة عاجلة. احسب $أ_{١٢}$ لتحدّد هل يحتاج المريض إلى الجراحة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢-١٩ المتتابعات المجمَّعة

الرياضيات

الفصل الثانى المتتابعات

لاحظ!

! فى المتتابعات المجمَّعة، انظر فى انتظام **المتتابعة قبل التجميع** وانتظام **عدد الحدود الموجودة فى كل مجموعة**.

نواتج التعلّم

يحلّ مسائل متنوّعة بتقسيم المتتابعة إلى مجموعات، ليوجد حدًّا بعينه أو مجموع حدود مجموعة بعينها.

استعِدّ

قسّم متتابعة الأعداد الطبيعية إلى مجموعات كما هو موضح أدناه. حلّ المسائل الآتية.

٢ | ٤، ٦، ٨ | ١٠، ١٢، ١٤، ١٦، ١٨ | ٢٠، ٢٢، ... ...

١ أوجد الحدّ الأول من المجموعة العاشرة.

٢ أوجد مجموع الحدود الموجودة فى المجموعة ن.

٣ أوجد فى أى مجموعة وفى أى موضع يقع العدد ٨٨.

طريقة الحلّ

لتكن {أن} هى المتتابعة قبل التجميع. بما أنها متتابعة حسابية بالحدّ الأول ٢ والأساس ٢، فإنّ أن = ٢ن

لتكن {بن} هى متتابعة عدد الحدود فى كل مجموعة. بما أنها متتابعة حسابية بالحدّ الأول ١ والأساس ٢، فإنّ بن = ٢ن – ١

	المجموعة الأولى	المجموعة الثانية	المجموعة الثالثة	
{أن}	٢	٤، ٦، ٨	١٠، ١٢، ١٤، ١٦، ١٨	٢٠، ٢٢، ... ...
{بن}	١	٣	٥	

المتتابعة قبل التجميع.

متتابعة أعداد الحدود فى كل مجموعة.

١ أوجد الحدّ الأول من المجموعة العاشرة بإيجاد موضع الحدّ الأخير من المجموعة التاسعة فى {أن}.

	المجموعة التاسعة		المجموعة العاشرة	
٢	٤، ٦، ٨	١٠، ١٢، ١٤، ١٦، ١٨	...	٠، ... ، ٠ ...
حدّ واحد	ثلاثة حدود	خمسة حدود		

انظر فى المجموع من الحدّ الأول إلى الحدّ التاسع فى {بن}.

م = $\frac{١}{٢}$ن{٢أ + (ن – ١)د}

مجموع عدد الحدود حتى المجموعة التاسعة هو:

$\frac{١}{٢}$ × ٩ × {٢ × ١ + (٩ – ١) × ٢} = ٨١

إذن، بما أنّ الحدّ الأول من المجموعة العاشرة هو الحدّ الثانى والثمانون فى {أن}:

أن = ٢ن

٢ × ٨٢ = ١٦٤

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

٢ أوجد المجموع باستخدام ❶ الحدّ الأخير، ❷ الحدّ الأول، و❸ عدد حدود المجموعة ن.

❶ أوجد الحدّ الأخير من المجموعة ن.

إيجاد موضع الحدّ الأخير من المجموعة ن فى {أن}:

$\frac{١}{٢}$ن{٢ × ١ + (ن – ١) × ٢} = ن^{٢} ..... (١)

إذن، الحدّ الأخير من المجموعة ن هو ٢ن^{٢}.

أن = ٢ن

❷ أوجد الحدّ الأول من المجموعة ن باستخدام الحدّ الأخير من المجموعة (ن – ١)، مشابهًا للسؤال **ا**

المجموعة (ن – ١) **المجموعة ن**

... ، ٠ | ٠ ، ... ، ٠ | ...

من (١)، الحدّ الأخير من المجموعة (ن – ١) هو الحدّ (ن – ١)^{٢} فى {أن}.

إذن، الحدّ الأول من المجموعة ن هو الحدّ {(ن – ١)^{٢} + ١} فى {أن}. أى الحدّ (ن^{٢} – ٢ن + ٢)، وبذلك:

٢(ن^{٢} – ٢ن + ٢)

❸ عدد الحدود فى المجموعة ن هو ٢ن – ١

ب$_{ن}$ = ٢ن – ١

إذن، المجموع المطلوب هو مجموع متتابعة حسابية بالحدّ الأخير ٢ن^{٢}، والحدّ الأول ٢(ن^{٢} – ٢ن + ٢)، وعدد الحدود ٢ن – ١:

$\frac{١}{٢}$(٢ن – ١){٢(ن^{٢} – ٢ن + ٢) + ٢ن^{٢}} = ٢(٢ن – ١)(ن^{٢} – ن + ١)

٣ أوّلًا، أوجد موضع العدد ٨٨ فى {أن}.

حلّ ٢ن = ٨٨ يعطى ن = ٤٤

هنا، من **٢**، الحدّان الأخيران من المجموعتين (ن – ١) وهما الحدّ (ن – ١)^{٢} والحدّ ن^{٢} فى {أن} على الترتيب.

عوّض أعدادًا محدَّدة فى ن للتحقّق من أىّ مجموعة ينتمى إليها الحدّ الرابع والأربعون.

بما أنّ ٦^{٢} = ٣٦ و٧^{٢} = ٤٩، فإنّ الحدّ الرابع والأربعين فى المجموعة السابعة.

المجموعة السادسة **المجموعة السابعة**

... ، (الحدّ رقم ٣٦) | ... ، ٨٨ ، ... ، (الحدّ رقم ٤٩) |

(الحدّ رقم ٤٤)

بما أنّ ٤٤ – ٣٦ = ٨، فإنّ العدد ٨٨ هو **الحدّ الثامن من المجموعة السابعة**.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاوِل

قسّم متتابعة الأعداد الطبيعية إلى مجموعات كما هو موضح أدناه. حلّ المسائل الآتية.

١ | ٣، ٥ | ٧، ٩، ١١ | ١٣، ١٥، ١٧، ١٩ | ٢١، ٢٣، ...

١ أوجد الحدّ الأول من المجموعة العاشرة.

٢ أوجد مجموع الحدود الموجودة فى المجموعة العاشرة.

٣ أوجد فى أى مجموعة وفى أى موضع يقع العدد ١٠١.

تدرَّب

قسّم متتابعة الأعداد الطبيعية إلى مجموعات كما هو موضح أدناه. حلّ المسائل الآتية.

١ ١ | ٢، ٣ | ٤، ٥، ٦ | ٧، ٨، ٩، ١٠ | ١١، ١٢، ...

(أ) أوجد الحدّ الأول من المجموعة العاشرة.

(ب) أوجد مجموع الحدود الموجودة فى المجموعة العاشرة.

(جـ) أوجد فى أى مجموعة وفى أى موضع يقع العدد ١٢٤.

٢ ١، ٤ | ٧، ١٠، ١٣، ١٦ | ١٩، ٢٢، ٢٥، ٢٨، ٣١ | ٣٤، ٣٧، ٤٠، ...

(أ) أوجد الحدّ الأول من المجموعة العاشرة.

(ب) أوجد مجموع الحدود الموجودة فى المجموعة العاشرة.

(جـ) أوجد فى أى مجموعة وفى أى موضع يقع العدد ١٠٠.

★ التحدِّى

٢، ٦ | ١٠، ١٤، ١٨ | ٢٢، ٢٦، ٣٠، ٣٤ | ... ...

(أ) أوجد الحدّ الأول من المجموعة الثانية عشرة.

(ب) استنتج قاعدة لمجموع حدود المجموعة ن.

(جـ) عيّن فى أىّ مجموعة يقع العدد ٢٠٢، وفى أىّ موضع منها.

(د) امتداد التحدِّى: أوجد مجموع حدود المجموعات من الأولى إلى الثانية عشرة.

تأمَّل

عند تحليل متتابعة غير مألوفة من بيانات واقعية، ما المؤشّرات أو القرائن البصرية التى تدفعك إلى اختيار طريقة متتابعة الفروق بدل طريقة المتتابعات المجمَّعة؟

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢-٠٢
الرياضيات

علاقات التكرار (١)

الفصل الثانى المتتابعات

نواتج التعلّم

يحلّ علاقات التكرار بمستوياتها المختلفة.
ليستنتج حدود المتتابعة.

المفهوم ٥ · علاقات التكرار والاستقراء

حين يصف الطبيب مضادًا حيويًا، فالغاية أن تبقى فى دم المريض كمّية علاجية من الدواء. وفى كلّ ٢٤ ساعة يتناول المريض جرعة جديدة، بينما يمثّل جسمه نسبة ثابتة ممّا فى الدم ويتخلّص منها. ولضمان بقاء الدواء فعّالًا دون بلوغ الحدّ السامّ، يلزم علماء الأدوية نمذجة هذه الدورة اليومية. فكمّية الدواء غدًا تتوقّف مباشرةً على الكمّية الباقية اليوم. وهذا التوقّف خطوةً بخطوة هو جوهر علاقة التكرار. ولإثبات بقاء هذا النمط آمنًا عبر عدد غير منتهٍ من الأيام، يستعمل الرياضيّون أثرًا منطقيًّا متسلسلًا كأحجار الدومينو، يسمّى الاستقراء الرياضى.

السؤال الموجّه: كيف نثبت رياضيًّا أن عملية متكرّرة خطوةً بخطوة تظلّ مستقرّة ويمكن التنبّؤ بها إلى ما لا نهاية؟

لاحِظ!

تتحدّد المتتابعة {أن}، ويمكن إيجاد أ٢، أ٣، أ٤، ... بالترتيب، إذا كان الشرطان الآتيان مُعطَيين.

(أ) الحدّ الأول

(ب) علاقة لإيجاد أن + ١ من أن (ن = ١، ٢، ٣، ...)

يُسمّى **(ب)** أعلاه **علاقة تكرار**. فيما يلى، يُفترض أن علاقات التكرار تصحّ لـ ن = ١، ٢، ٣، ... .

علاقات التكرار التى تمثّل المتتابعات الحسابية والهندسية.

أن + ١ = أن + د ⟹ متتابعة حسابية بالأساس د.

إضافة د إلى أن يعطى أن + ١

أن + ١ = رأن ⟹ متتابعة هندسية بالأساس ر.

ضرب أن فى ر يعطى أن + ١

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

استعِدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحدود من الثانى إلى الرابع للمتتابعة {أن} المحدَّدة بالشروط الآتية.

أ١ = ٢ ، أن+١ = ٣أن + ٢

٢ أوجد الحدّ العام للمتتابعة {أن} المحدَّدة بالشروط الآتية.

(أ) أ١ = −١٠ ، أن+١ = أن + ٥

(ب) أ١ = ٢ ، أن+١ = ٣أن

طريقة الحلّ

١ يُوجد الحدّ الثانى بالتعويض ن = ١ فى علاقة التكرار المعطاة.

أ١+١ = ٣أ١ + ٢

أ٢ = ٣ × ٢ + ٢

= ٨

يُوجد الحدّ الثالث باستخدام الحدّ الثانى.

أ٢+١ = ٣أ٢ + ٢

أ٣ = ٣ × ٨ + ٢

= ٢٦

وبالمثل، يُوجد الحدّ الرابع باستخدام الحدّ الثالث.

أ٣+١ = ٣أ٣ + ٢

أ٤ = ٣ × ٢٦ + ٢

= ٨٠

إذن، أ٢ = ٨ ، أ٣ = ٢٦ ، أ٤ = ٨٠

٢ **(أ)** بما أنّ المتتابعة {أن} متتابعة حسابية بالحدّ الأول −١ والأساس ٥:

أن = −١ + (ن − ١) × ٥

أن = ٥ن − ٦

أن = أ + (ن − ١)د

(ب) بما أنّ المتتابعة {أن} متتابعة هندسية بالحدّ الأول ٢ والأساس ٣:

أن = ٢ × ٣ن−١

أن = أرن−١

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاوِل

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحدود من الثانى إلى الرابع للمتتابعة {أن} المحدَّدة بالشروط الآتية.

(أ) أ١ = –٦ ، أن+١ = ٢أن + ٣ **(ب)** أ١ = ٢ ، أن+١ = ٣أن – ن

٢ أوجد الحدّ العام للمتتابعة {أن} المحدَّدة بالشروط الآتية.

(أ) أ١ = ١ ، أن+١ = أن + ٣ **(ب)** أ١ = ٤ ، أن+١ = أن – ٢

(ج) أ١ = ٣ ، أن+١ = ٥أن **(د)** أ١ = –٣ ، أن+١ = –٢أن

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحدود من الثانى إلى الرابع للمتتابعة {أن} المحدَّدة بالشروط الآتية.

(أ) أ١ = ١ ، أن+١ = –٢أن + ٥ **(ب)** أ١ = –٦ ، أن+١ = أن + ن^{٢} – ٢ن

(ج) أ١ = ٣ ، أن+١ = ٣أن – ن **(د)** أ١ = –٢ ، أن+١ = أن – ن

(هـ) أ١ = ٢ ، أن+١ = أن + ٢ن **(و)** أ١ = –٢ ، أن+١ = أن + ٣ن

٢ أوجد الحدّ العام للمتتابعة {أن} المحدَّدة بالشروط الآتية.

(أ) أ١ = ١ ، أن+١ = أن + ٦ **(ب)** أ١ = ٣ ، أن+١ = أن – ٥

(ج) أ١ = ٤ ، أن+١ = ٣أن **(د)** أ١ = ٢ ، أن+١ = –٥أن

(هـ) أ١ = –٢ ، أن+١ = أن + ٣ **(و)** أ١ = ٤ ، أن+١ = أن – ٤

(ز) أ١ = ١ ، أن+١ = ٤أن **(ح)** أ١ = –٢ ، أن+١ = –٤أن

★ التحدِّى

حلّ علاقة التكرار الآتية لإيجاد أن:

أن = ٦أن–١ – ١١أن–٢ + ٦أن–٣ عندما ن ≥ ٣

بالشروط الابتدائية: أ٠ = ٠ ، أ١ = ١ ، أ٢ = ٦

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢-٢١
الرياضيات

علاقات التكرار (٢)

الفصل الثانى المتتابعات

لاحظ!

علاقات التكرار حيث تكون متتابعة الفروق معلومة

$أ_{ن+١} = أ_ن + د(ن)$

عندما $ن \geq ٢$، $أ_ن = أ_١ + \sum_{ك=١}^{ن-١} د(ك)$

نواتج التعلّم

يحلّ علاقات التكرار بمستوياتها المختلفة، ليستنتج حدود المتتابعة.

د(ن) هو الحدّ العام لمتتابعة الفروق لـ {$أ_ن$}.

تعبير بدلالة ن. يمكن تحويلها إلى $أ_{ن+١} - أ_ن = د(ن)$.

استعِدّ

أوجد الحدّ العام للمتتابعة {$أ_ن$} المحدَّدة بالشروط الآتية.

$أ_١ = ١$، $أ_{ن+١} = أ_ن + ٢ن - ٣$

طريقة الحلّ

بما أنّ $أ_{ن+١} - أ_ن = ٢ن - ٣$، فإنّ الحدّ العام لمتتابعة الفروق لـ {$أ_ن$} هو $٢ن - ٣$

إذن، عندما $ن \geq ٢$:

$$أ_ن = ١ + \sum_{ك=١}^{ن-١} (٢ك - ٣)$$

$$= ١ + ٢ \times \frac{١}{٢}(ن - ١)\{(ن - ١) + ١\} - ٣(ن - ١)$$

$$= ن^٢ - ٤ن + ٤ = (ن - ٢)^٢$$

هذه الصيغة تنطبق أيضًا عندما $ن = ١$

إذن، $أ_ن = (ن - ٢)^٢$

حاوِل

أوجد الحدّ العام للمتتابعة {$أ_ن$} المحدَّدة بالشروط الآتية.

(أ) $أ_١ = ٢$، $أ_{ن+١} = أ_ن + ن^٢$

(ب) $أ_١ = ١$، $أ_{ن+١} = أ_ن + ٣^ن$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدرَّب

أوجد الحدّ العام للمتتابعة {أن} المحدَّدة بالشروط الآتية.

(أ) $أ_{١} = ٢$ ، $أ_{ن+١} = أ_{ن} + ٢ن$

(ب) $أ_{١} = ٢$ ، $أ_{ن+١} = أ_{ن} + ٣ن^{٢}$

(ج) $أ_{١} = ١$ ، $أ_{ن+١} = أ_{ن} + ٢^{ن}$

(د) $أ_{١} = ٢$ ، $أ_{ن+١} = أ_{ن} + ٣ن + ١$

(هـ) $أ_{١} = ٢$ ، $أ_{ن+١} = أ_{ن} + ٢ن^{٢} + ن$

(و) $أ_{١} = ٢$ ، $أ_{ن+١} = أ_{ن} - ٣^{ن}$

(ز) $أ_{١} = ٤$ ، $أ_{ن+١} = أ_{ن} - ٤^{ن}$

★ التحدِّى

شركة ناشئة تبدأ باحتياطيٍّ نقديٍّ قدره ٤٠٠,٠٠٠ جنيه ($أ_{١}$ = ٤ من مئات الألوف). وتنفق ٤ن ألف جنيه فى نهاية كلّ ربع سنة:

$$أ_{١} = ٤ ، أ_{ن+١} = أ_{ن} - ٠,٠٤ن$$

أوجد صيغة صريحة للحدّ العام أن للتنبّؤ باحتياطى الشركة النقدىّ فى بداية أىّ ربع سنة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢-٢٢
الرياضيات

علاقات التكرار (٣)

الفصل الثانى المتتابعات

نواتج التعلّم

يحلّ علاقات التكرار بمستوياتها المختلفة.
ليستنتج حدود المتتابعة.

لاحظ!

! خطوات إيجاد الحدّ العام من علاقة تكرار على الصورة أ$_{ن+١}$ = ف أ$_{ن}$ + ق.

❶ استبدل جـ بكلٍّ من أ$_{ن+١}$ وأ$_{ن}$ فى علاقة التكرار.

❷ حلّ المعادلة الناتجة من ❶.

❸ عوّض بالحلّ الناتج من ❷ فى أ$_{ن+١}$ – جـ = ف(أ$_{ن}$ – جـ).

❹ بفرض أ$_{ن}$ – جـ = ب$_{ن}$، تكون {ب$_{ن}$} متتابعة هندسية أساسها ف.

❺ أوجد الحدّ العام لـ {أ$_{ن}$} باستخدام الحدّ العام لـ {ب$_{ن}$}.

استعِدّ

أوجد الحدّ العام للمتتابعة {أ$_{ن}$} المحدَّدة بالشروط الآتية.

أ$_{١}$ = ١ ، أ$_{ن+١}$ = ٣أ$_{ن}$ + ٤

طريقة الحلّ

باستبدال جـ بكلٍّ من أ$_{ن+١}$ وأ$_{ن}$ فى علاقة التكرار المعطاة أ$_{ن+١}$ = ٣أ$_{ن}$ + ٤:

جـ = ٣جـ + ٤

بحلّ هذه المعادلة نجد جـ = –٢

عوّض جـ = –٢ فى أ$_{ن+١}$ – جـ = ف(أ$_{ن}$ – جـ).

إذن، أ$_{ن+١}$ + ٢ = ٣(أ$_{ن}$ + ٢) ..... (١)

هنا، بفرض أ$_{ن}$ + ٢ = ب$_{ن}$ ..... (٢)، يمكن التعبير عنها بـ أ$_{ن+١}$ + ٢ = ب$_{ن+١}$

بالتعويض فى (١) نجد ب$_{ن+١}$ = ٣ب$_{ن}$، إذن {ب$_{ن}$} متتابعة هندسية أساسها ٣

كذلك، الحدّ الأول ب$_{١}$ لـ {ب$_{ن}$} هو، من (٢)، ب$_{١}$ = أ$_{١}$ + ٢

= ١ + ٢

= ٣

{ب$_{ن}$} متتابعة هندسية حدّها الأول ٣ وأساسها ٣

إذن، ب$_{ن}$ = ٣ × ٣$^{ن-١}$

= ٣^{ن}

بالتعويض فى (٢) نجد أ$_{ن}$ + ٢ = ٣^{ن}

أ$_{ن}$ = ٣^{ن} – ٢

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاوِل

أوجد الحدّ العام للمتتابعة {أن} المحدَّدة بالشروط الآتية.

(أ) أ١ = ١٠ ، أن+١ = ٥أن + ٨

(ب) أ١ = ٤٠ ، أن+١ = −٢أن + ٣

تدرَّب

أوجد الحدّ العام للمتتابعة {أن} المحدَّدة بالشروط الآتية.

(أ) أ١ = ٢٠ ، أن+١ = ٢أن − ١

(ب) أ١ = −٣٠ ، أن+١ = ٤أن + ٣

(جـ) أ١ = ٣٠ ، أن+١ = ٣أن − ٢

(د) أ١ = −٢٠ ، أن+١ = −٣أن + ٤

(هـ) أ١ = ١٠ ، أن+١ = $\frac{١}{٣}$أن + ٢

(و) أ١ = ٢٠ ، أن+١ = $\frac{٢}{٣}$أن − $\frac{١}{٢}$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢-٣ الاستقراء الرياضى لإثبات المتطابقات

الرياضيات

الفصل الثانى المتتابعات

لاحظ!

البرهان بالاستقراء الرياضى

خطوات إثبات أنّ «الشرط **(أ)** يتحقّق لجميع الأعداد الطبيعية ن»

[١] أثبت أنّ **(أ)** يتحقّق عندما ن = ١

[٢] افترض أنّ **(أ)** يتحقّق عندما ن = ك، واكتب المعادلة التى تتحقّق عندئذٍ.

بتحويل تلك المعادلة، أثبت أنّ **(أ)** يتحقّق أيضًا عندما ن = ك + ١

نواتج التعلّم

يطبّق مبدأ الاستقراء الرياضى لإثبات صحّة المساواة والمتطابقات الرياضية.

استعِدّ

استخدم الاستقراء الرياضى لإثبات أنّ $١ + ٢ + ٣ + \cdots + ن = \frac{١}{٢}ن(ن + ١)$

طريقة الحلّ

لتكن المتطابقة المعطاة هى **(أ)**.

[١] عندما ن = ١:

الطرف الأيمن = ١، الطرف الأيسر = $\frac{١}{٢} \times ١ \times (١ + ١) = ١$

إذن، **(أ)** يتحقّق عندما ن = ١

[٢] افترض أنّ **(أ)** يتحقّق عندما ن = ك:

$١ + ٢ + ٣ + \cdots + ك = \frac{١}{٢}ك(ك + ١)$ ..... (ا)

عندما ن = ك + ١، من (ا):

الطرف الأيمن $= ١ + ٢ + ٣ + \cdots + ك + (ك + ١)$

استنتج التعبير الذى يتحقّق لـ ن = ك + ١ باستخدام (ا).

$= \frac{١}{٢}ك(ك + ١) + (ك + ١)$

لا تُفكّ الأقواس: استخرج العامل $\frac{١}{٢}(ك + ١)$.

$= \frac{١}{٢}(ك + ١)(ك + ٢)$

حوّل إلى الصورة المتحصَّل عليها بتعويض ن = ك + ١ فى الطرف الأيسر لـ **(أ)**.

$= \frac{١}{٢}(ك + ١)\{(ك + ١) + ١\}$

الطرف الأيسر $= \frac{١}{٢}(ك + ١)\{(ك + ١) + ١\}$

إذن، **(أ)** يتحقّق أيضًا عندما ن = ك + ١

من **[١]** و**[٢]**، يتحقّق **(أ)** لجميع الأعداد الطبيعية.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاوِل

استخدم الاستقراء الرياضى لإثبات المتطابقات الآتية.

(أ) $١ + ٣ + ٥ + \cdots + (٢ن - ١) = ن^{٢}$

(ب) $١ \times ٢ + ٢ \times ٣ + ٣ \times ٤ + \cdots + ن(ن + ١) = \frac{١}{٣}ن(ن + ١)(ن + ٢)$

تدرَّب

استخدم الاستقراء الرياضى لإثبات المتطابقات الآتية.

(أ) $١^{٢} + ٣^{٢} + ٥^{٢} + \cdots + (٢ن - ١)^{٢} = \frac{١}{٣}ن(٢ن - ١)(٢ن + ١)$

(ب) $٣ + ٣ \times ٤ + ٣ \times ٤^{٢} + \cdots + ٣ \times ٤^{ن - ١} = ٤^{ن} - ١$

(جـ) $١ \times ٣ + ٢ \times ٤ + ٣ \times ٥ + \cdots + ن(ن + ٢) = \frac{١}{٦}ن(ن + ١)(٢ن + ٧)$

(د) $١ + ١٠ + ١٠^{٢} + \cdots + ١٠^{ن} = \frac{١}{٩}(١٠^{ن + ١} - ١)$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢-٢٤
الرياضيات

الاستقراء الرياضى لإثبات المتباينات

الفصل الثانى المتتابعات

لاحظ!

عند إثبات متطابقات أو متباينات تتضمّن $أ^{ن}$، اضرب طرفَى التعبير المفترَض فى أ.

استعِدّ

عندما ن عدد طبيعى أكبر من أو يساوى ٤، أثبت المتباينة الآتية.

$٢^{ن} > ٣ن$

طريقة الحلّ

لتكن المتباينة المعطاة هى **(أ)**.

[١] عندما ن = ٤، الطرف الأيمن $= ٢^{٤} = ١٦$، الطرف الأيسر $= ٣ \times ٤ = ١٢$

إذن، تصحّ **(أ)** عند ن = ٤

[٢] بافتراض ك ≥ ٤ وأنّ **(أ)** تصحّ عند ن = ك،

$٢^{ك} > ٣ك$

بضرب الطرفين فى ٢ نحصل على

$٢^{ك+١} > ٦ك$ ..... (١)

هنا، بمقارنة ٦ك و٣(ك + ١):

عندما ك ≥ ٤، $٦ك - ٣(ك + ١) = ٦ك - ٣ك - ٣$

$= ٣ك - ٣ > ٠$

إذن، $٦ك > ٣(ك + ١)$ ..... (٢)

من (١) و(٢)، بما أنّ $٢^{ك+١} > ٦ك > ٣(ك + ١)$،

$٢^{ك+١} > ٣(ك + ١)$

وهذا يبيّن أنّ **(أ)** تصحّ أيضًا عندما ن = ك + ١

من **[١]** و**[٢]**، تصحّ **(أ)** لجميع الأعداد الطبيعية الأكبر من أو المساوية لـ ٤

بما أننا نُثبت هذا لـ ن ≥ ٤ فأكثر، أثبت أنه يتحقّق عندما ن = ٤

باستخدام هذا التعبير، أثبت **(أ)** لـ ن = ك + ١، وهو $٢^{ك+١} > ٣(ك + ١)$.

بما أنّ الطرف الأيسر عند تعويض ن = ك + ١ فى **(أ)** هو ٣(ك + ١)، أثبت أنّ $٢^{ك+١} > ٦ك > ٣(ك + ١)$.

نواتج التعلّم

يطبّق مبدأ الاستقراء الرياضى لإثبات صحّة المتباينات الجبرية.

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

حاوِل

عندما ن عدد طبيعى أكبر من أو يساوى ٣، أثبت المتباينة الآتية.

$٣^{ن} > ٥ن + ١$

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ عندما ن عدد طبيعى، أثبت المتباينة الآتية.

$٣^{ن} > ٢^{ن}$

٢ عندما ن عدد طبيعى أكبر من أو يساوى ٤، أثبت المتباينة الآتية.

$٢^{ن} > ٣ن + ١$

★ التحدِّى

عندما هـ > ٠ ون عدد طبيعى أكبر من أو يساوى ٣، أثبت المتباينة الآتية.

$(١ + هـ)^{ن} > ١ + نهـ^{٢}$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢-٢٥
الرياضيات

إثبات كون العدد مضاعفًا باستخدام الاستقراء الرياضى

الفصل الثانى المتتابعات

لاحِظ!

عند إثبات أنّ عددًا ما مضاعف لـ أ، استخدم التعبير المفترَض لتبيّن أنه يأخذ الصورة أ × (عدد صحيح).

نواتج التعلّم

يطبّق مبدأ الاستقراء الرياضى لإثبات صحّة قابلية القسمة.

استعِدّ

أثبت أنّ ن^{٣} + (ن + ١)^{٣} + (ن + ٢)^{٣} مضاعف للعدد ٩ لجميع الأعداد الطبيعية ن، باستخدام الاستقراء الرياضى.

طريقة الحلّ

لتكن **(أ)** هى «ن^{٣} + (ن + ١)^{٣} + (ن + ٢)^{٣} مضاعف للعدد ٩».

[١] عندما ن = ١،

١^{٣} + (١ + ١)^{٣} + (١ + ٢)^{٣} = ١ + ٨ + ٢٧

= ٣٦

٣٦ مضاعف للعدد ٩

إذن، **(أ)** يتحقّق عندما ن = ١.

[٢] بافتراض أنّ **(أ)** يتحقّق عندما ن = ك، يمكن التعبير عنه باستخدام العدد الصحيح م كما يلى:

ك^{٣} + (ك + ١)^{٣} + (ك + ٢)^{٣} = ٩م

باستخدام هذه المعادلة، أثبت أنّ **(أ)** يتحقّق عندما ن = ك + ١

بالنظر إلى حالة ن = ك + ١:

(ك + ١)^{٣} + (ك + ٢)^{٣} + (ك + ٣)^{٣} = ٩م – ك^{٣} + (ك + ٣)^{٣}

بما أنّ
(ك + ١)^{٣} + (ك + ٢)^{٣} = ٩م – ك^{٣}
من
ك^{٣} + (ك + ١)^{٣} + (ك + ٢)^{٣} = ٩م
:
(ك + ١)^{٣} + (ك + ٢)^{٣} + (ك + ٣)^{٣}
= ٩م – ك^{٣} + (ك + ٣)^{٣}

= ٩م – ك^{٣} + ك^{٣} + ٩ك^{٢} + ٢٧ك + ٢٧

= ٩(م + ك^{٢} + ٣ك + ٣)

وبما أنّ م + ك^{٢} + ٣ك + ٣ عدد صحيح، فإنّ ٩(م + ك^{٢} + ٣ك + ٣) مضاعف للعدد ٩

إذن، (ك + ١)^{٣} + (ك + ٢)^{٣} + (ك + ٣)^{٣} مضاعف للعدد ٩، ويتحقّق **(أ)** أيضًا عندما ن = ك + ١.

من **[١]** و**[٢]**، يتحقّق **(أ)** لجميع الأعداد الطبيعية.

حاوِل

أثبت أنّ ن^{٣} + ٢ن مضاعف للعدد ٣ لجميع الأعداد الطبيعية ن، باستخدام الاستقراء الرياضى.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ أثبت أنّ ٢ن^{٣} – ٣ن^{٢} + ن مضاعف للعدد ٦ لجميع الأعداد الطبيعية ن، باستخدام الاستقراء الرياضى.

٢ أثبت أنّ ٤ن^{٣} – ن يقبل القسمة على ٣ لجميع الأعداد الطبيعية ن، باستخدام الاستقراء الرياضى.

★ التحدّى

أثبت أنه لأىّ عدد صحيح ن ≥ ١:

(ن + ١)^{ن} – ١ مضاعف لـ ن^{٢}.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢-٢٦
الرياضيات

علاقات التكرار والاستقراء الرياضى

الفصل الثانى المتتابعات

استعِدّ

بالنسبة للمتتابعة {أن} المحدَّدة بالشرطين أ١ = ٣ وأن+١ = $\frac{\text{أن}^{٢} - ١}{\text{ن} + ١}$، حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد أ٢، أ٣، أ٤ وقدّر الحدّ العام لهذه المتتابعة.

٢ أثبت أنّ التقدير فى ١ صحيح باستخدام الاستقراء الرياضى.

نواتج التعلّم

يوظّف الاستقراء الرياضى لإثبات علاقات تكرار المتتابعات والتحقّق من صحّتها.

طريقة الحلّ

١ من علاقة التكرار المعطاة:

أ٢ = $\frac{\text{أ}_{١}^{٢} - ١}{١ + ١}$ = $\frac{٣^{٢} - ١}{٢}$ = $\frac{٨}{٢}$ = ٤ وبالمثل، أ٣ = ٥، أ٤ = ٦

{أن} : ٣، ٤، ٥، ٦، ...

إذن، يمكننا تقدير أن = ن + ٢

٢ لتكن أن = ن + ٢ هى **(أ)**.

[١] عندما ن = ١، بتعويض ن = ١ فى **(أ)** نحصل على:

أ١ = ١ + ٢ = ٣

إذن، يتحقّق **(أ)** عندما ن = ١

[٢] بافتراض أنّ **(أ)** يتحقّق عندما ن = ك،

أك = ك + ٢

عندئذٍ، بإيجاد أك+١ من علاقة التكرار المعطاة:

أك+١ = $\frac{\text{أك}^{٢} - ١}{\text{ك} + ١}$

عوّض أك = ك + ٢

= $\frac{(\text{ك} + ٢)^{٢} - ١}{\text{ك} + ١}$

= ك + ٣

حوّل إلى الصورة المتحصَّل عليها بتعويض ن = ك + ١ فى الطرف الأيسر لـ **(أ)**.

= (ك + ١) + ٢

وهذا يبيّن أنّ **(أ)** يتحقّق أيضًا عندما ن = ك + ١

من **[١]** و**[٢]**، يتحقّق **(أ)** لجميع الأعداد الطبيعية.

إذن، التقدير فى ١ صحيح.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاوِل

بالنسبة للمتتابعة {أن} المحدَّدة بـ أ١ = −١ وأن+١ = أن٢ + ٢ن أن − ٢، حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد أ٢، أ٣، أ٤ وقدّر الحدّ العام.

٢ أثبت أنّ التقدير فى ١ صحيح باستخدام الاستقراء الرياضى.

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ بالنسبة للمتتابعة {أن} المحدَّدة بـ أ١ = ١ وأن+١ = أن٢ − ن٢أن + (ن + ١)٢، حلّ المسائل الآتية.

(أ) أوجد أ٢، أ٣، أ٤ وقدّر الحدّ العام.

(ب) أثبت أنّ التقدير فى **(أ)** صحيح باستخدام الاستقراء الرياضى.

٢ بالنسبة للمتتابعة {أن} المحدَّدة بـ أ١ = ١ وأن+١ = $\frac{\text{أن} - ٤}{\text{أن} - ٣}$، حلّ المسائل الآتية.

(أ) أوجد أ٢، أ٣، أ٤ وقدّر الحدّ العام.

(ب) أثبت أنّ التقدير فى **(أ)** صحيح باستخدام الاستقراء الرياضى.

★ التحدّى

ثلاثة أعداد [أ] ، [ب] ، [جـ] بهذا الترتيب تكوّن متتابعة هندسية أساسها ر. وإذا كانت [أ] ، ٢ ، [ب] ، [جـ] بهذا الترتيب تكوّن متتابعة حسابية، فعيّن القيم الممكنة لـ ر.

تأمَّل

كيف يساعدنا الاستقراء الرياضى على التأكّد من صحّة قانون عامّ لمتتابعة مُعرَّفة بعلاقة تكرار؟ اشرح إجابتك.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٣-١ الأعداد المركّبة

الرياضيات

الفصل الثالث الأعداد المركّبة والمعادلات

نواتج التعلّم

يتعرّف العدد المركّب

ع = أ + ب ت ويميّز مكوّنيه:

الجزء الحقيقي والجزء التخيّلي.

المفهوم ١ · العدد المركّب

حين يتابع الفنّي الطبي قلب المريض برسم القلب الكهربي (ECG)، تظهر على الشاشة موجات منتظمة متتابعة. وعلى نحو مشابه، يستعين جهاز الرنين المغناطيسي بمجالات مغناطيسية قوية وموجات راديوية ليكوّن صورًا دقيقة لأعضاء الجسم من الداخل.

هذه الإشارات الحيوية موجات في حقيقتها، وتتبّعها يقتضي تتبّع سعتها وزمنها (فرق الطور) معًا. والأعداد المألوفة تعجز عن حمل المعلومتين في آن واحد، لكنّ إطارًا رياضيًّا فريدًا يحلّ المشكلة إذ يعامل العدد نقطةً إحداثية في المستوى.

السؤال الموجّه: كيف تعيننا الأعداد المركّبة على توسيع فهمنا للرياضيات، فنحلّ مسائل تبدو مستحيلة بالأعداد الحقيقية وحدها؟

لاحظ!

- العدد الذي يساوي مربّعه −١ يُرمز إليه بـ ت، أي أنّ $ت^{٢} = -١$
- العدد المعبَّر عنه في الصورة أ + ب ت باستخدام عددين حقيقيين أ، ب يُسمّى **عددًا مركّبًا**.
  - الجزء أ يُسمّى **الجزء الحقيقي**، والجزء ب يُسمّى **الجزء التخيّلي**.
  - عندما ب = ٠، يصير أ + ب ت عددًا حقيقيًّا.
  - وعندما ب ≠ ٠، يُسمّى أ + ب ت **عددًا تخيّليًّا**.
- تساوي عددين مركّبين
  - عندما تكون أ، ب، ج، د أعدادًا حقيقية، إذا كان أ + ب ت = ج + د ت، فإنّ
    - أ = ج، ب = د
  - وعندما تكون أ، ب عددين حقيقيين، إذا كان أ + ب ت = ٠، فإنّ أ = ٠، ب = ٠

الأعداد المركّبة	
الأعداد التخيّلية	الأعداد الحقيقية
−٢ت، ٨ت	٧، − ٣

الأعداد الحقيقية أيضًا جزء من الأعداد المركّبة.

الأعداد الحقيقية أيضًا جزء من الأعداد المركّبة.

ت غير مشمولة في الجزء التخيّلي.

الجزآن الحقيقي والتخيّلي في الطرفين متساويان.

٠ = ٠ + ٠ ت

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ اذكر الجزء الحقيقي والجزء التخيّلي لكلٍّ من الأعداد المركّبة الآتية.

(أ) ٣ – ٢ت (ب) $\frac{-٤ - \sqrt{٥}\sqrt{٧}ت}{٣}$ (جـ) –٨ (د) ٢ت

٢ أوجِد قيمتَي العددين الحقيقيين س، ص اللتين تحقّقان المعادلة الآتية.

(٢ + ت)س + (١ + ت)ص = ٢ + ٣ت

طريقة الحل

١ (أ) ٣ – ٢ت الجزء الحقيقي: ٣، الجزء التخيّلي: –٢

(ب) $\frac{-٤ - \sqrt{٥}\sqrt{٧}ت}{٣} = -\frac{٤}{٣} - \frac{\sqrt{٥}\sqrt{٧}}{٣}ت$ الجزء الحقيقي: $-\frac{٤}{٣}$، الجزء التخيّلي: $-\frac{\sqrt{٥}\sqrt{٧}}{٣}$

(جـ) –٨ = –٨ + ٠ت الجزء الحقيقي: –٨، الجزء التخيّلي: ٠

(د) ٢ت = ٠ + ٢ت الجزء الحقيقي: ٠، الجزء التخيّلي: ٢

ت غير مشمولة في الجزء التخيّلي.

عبّر عنه في الصورة أ + بت أوّلًا.

٢ (٢ + ت)س + (١ + ت)ص = ٢ + ٣ت

فُكّ الطرف الأيمن ورتّبه في الصورة أ + بت.

٢س + تس + ص + تص = ٢ + ٣ت

(٢س + ص) + (س + ص)ت = ٢ + ٣ت

قارِن الجزأين الحقيقي والتخيّلي في الطرفين.

إذن،

$$\left.\begin{matrix} ٢س + ص = ٢ \\ س + ص = ٣ \end{matrix}\right\}$$

وبحلّ هذه المنظومة نحصل على س = –١، ص = ٤

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ اذكر الجزء الحقيقي والجزء التخيّلي لكلٍّ من الأعداد المركّبة الآتية.

(أ) –٣ + ٥ت (ب) $\frac{-١ - \sqrt{٣}\sqrt{٧}ت}{٢}$ (جـ) ١ (د) ٣ت

٢ أوجِد قيمتَي العددين الحقيقيين س، ص اللتين تحقّقان المعادلتين الآتيتين.

(أ) (س – ٦) + (س + ٣ص)ت = ٠ (ب) (٣ + ٢ت)س + (٤ – ت)ص = ٦ – ٧ت

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ اذكر الجزء الحقيقي والجزء التخيّلي لكلٍّ من الأعداد المركّبة الآتية.

(أ) ٢ + ٥ت

(ب) −٢٥ + ١٣ت

(جـ) $\frac{-٢\sqrt{٥ت}}{٣}$

(د) $\frac{-٧\sqrt{٣ت}}{٢}$

(هـ) −٤

(و) $\frac{١}{٤}$

(ز) $\sqrt{٣ت}$

(ح) −ت

٢ أوجِد قيمتَي العددين الحقيقيين س، ص اللتين تحقّقان المعادلات الآتية.

(أ) (٢س + ص) + (٣س − ص)ت = ٨ + ٧ت

(ب) (س + ١) − ٥ت = ٤ + (٢ص + ١)ت

(جـ) (س − ٢) + (س + ص)ت = ٠

(د) (٣ + ٢ت)س + (١ − ت)ص = ٧ + ٣ت

(هـ) (١ − ت)(س + صت) = ٢ + ت

★ التحدّي

مهندس صوت يبرمج مُلحَقًا لصدى ستيريو تتعقّب فيه الأعدادُ المركّبة شدّةَ الموجات الصوتية وزمنها. ولتوسيط الصوت تمامًا بين السمّاعة اليسرى (مُعامِل الشدّة س) والسمّاعة اليمنى (مُعامِل الشدّة ص)، يجب أن يتوازن المساران الصوتيان وفق المعادلة: (١ + ٢ت)(س + ت) = س(ص + ت)

أوجِد القيمتين المضبوطتين للعددين الحقيقيين س ، ص.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٣-٢
الرياضيات

العمليات على الأعداد المركّبة (١)

الفصل الثالث الأعداد المركّبة والمعادلات

لاحِظ!

- يمكن إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركّبة بالطريقة نفسها المستخدمة في التعبيرات الجبرية. ومع ذلك، إذا ظهر $ت^{٢}$، عوّض بـ $ت^{٢} = -١$
- ينبغي حساب قوى ت بالتعبير عنها بدلالة $ت^{٢}$

مثال: $ت^{٨} = (ت^{٢})^{٤} = (-١)^{٤} = ١$ $ت^{٧} = ت \times (ت^{٢})^{٣} = ت \times (-١)^{٣} = -ت$

عندما يكون الأُسّ فرديًا، عبّر عنه باستخدام ت وت^{٢}.

استعد

احسب ما يأتي.

(أ) $(٣ - ٢ت) - (٢ + ٥ت)$ (ب) $(ت - ٢)^{٢}$ (جـ) $ت^{٦} + ت^{٢٧} + ت^{١٧}$

طريقة الحل

(أ) $(٣ - ٢ت) - (٢ + ٥ت)$

احسب بمعاملة ت كمتغيّر.

$= ٣ - ٢ت - ٢ - ٥ت$

أجِب في الصورة أ + بت

$= ١ - ٧ت$

(ب) $(ت - ٢)^{٢}$

$= ت^{٢} - ٤ت + ٤$

عوّض $ت^{٢} = -١$

$= -١ - ٤ت + ٤$

$= ٣ - ٤ت$

(جـ) $ت^{٦} + ت^{٢٧} + ت^{١٧}$

عبّر عن كل قوة من قوى ت باستخدام $ت^{٢}$

$= (ت^{٢})^{٣} + ت \times (ت^{٢})^{١٣} + ت \times (ت^{٢})^{٨}$

$= (-١)^{٣} + ت \times (-١)^{١٣} + ت \times (-١)^{٨}$

$= -١ - ت + ت$

$= -١$

حاول

احسب ما يأتي.

(أ) $(٤ + ٦ت) + (-٣ + ٢ت)$ (ب) $(٢ + ٣ت)(١ - ٢ت)$ (جـ) $ت + ت^{٢} + ت^{٣} + ت^{٤}$

نواتج التعلّم

يتعرّف العدد المركّب ع = أ + بت ويميّز مكوّنيه: الجزء الحقيقي والجزء التخيّلي. ويجري العمليات الحسابية (الجمع والطرح والضرب والقسمة) على الأعداد المركّبة، ويضع الناتج في أبسط صورة.

تصوّرات خاطئة

خلط الجزأين الحقيقي والتخيّلي: جمع الحدود غير المتشابهة أو طرحها معًا بدل إبقاء الجزء الحقيقي والجزء التخيّلي منفصلين.

أخطاء في الضرب: نسيان أنّ $ت \times ت = ت^{٢} = -١$ عند فكّ الأقواس.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدريب

احسب ما يأتي.

(أ) $(٧ + ٤ت) - (٣ + ٥ت)$

(ب) $(-٤ + ٣ت) + (٥ - ٦ت)$

(ج) $(٣ - ٣ت) - (٥ - ٣ت)$

(د) $(\sqrt{٢} + ٣ت)(\sqrt{٢} + ت)$

(هـ) $(٢ + ٣ت) + (٥ + ٨ت)$

(و) $\left(\frac{٢}{٥} - \frac{١}{٢}ت\right) - \left(\frac{٣}{٧}ت + \frac{١}{٣}\right)$

(ز) $(٢ت - ١)^{٢}$

(ح) $\left(\frac{٢}{ت} + ت\right)\left(\frac{٢}{ت} - ت\right)$

(ط) $(٢ + ت)^{٣} + (٢ - ت)^{٣}$

(ي) $ت^{٥} + ت^{٣} + ت$

(ك) $ت^{٩} + ت^{١٤} + ت^{١١}$

(ل) $ت^{١٢} + ت^{١٨} + ت^{١٥}$

★ التحدّي

إذا كان س عددًا حقيقيًّا، فحلّ المعادلة:

$(٧س - ٧ت)(س^{٢} + سـت) = ١٤س^{٢}ت^{٤٠}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٣-٣ العمليات على الأعداد المركّبة (٢)

الرياضيات

الفصل الثالث الأعداد المركّبة والمعادلات

لاحِظ!

- الأعداد المركّبة أ + بت وأ – بت تُسمّى **المرافقات المركّبة**.
- حاصل ضرب الأعداد المركّبة المرافقة يصبح عددًا حقيقيًّا.

مثال: $(٢ + ٣ت)(٢ - ٣ت) = ٤ - ٩ت^{٢}$

$= ٤ - ٩ \times (-١)$

$= ٤ + ٩ = ١٣$

- بالنسبة للتعبيرات الكسرية التي تحتوي على أعداد تخيّلية في المقام، اضرب أوّلًا كلًّا من البسط والمقام في **المرافق المركّب للمقام** لجعل المقام عددًا حقيقيًّا.

مثال: $\frac{١ - ت}{٢ + ٣ت} = \frac{(١ - ت)(٢ - ٣ت)}{(٢ + ٣ت)(٢ - ٣ت)}$

$= \frac{-١ - ٥ت}{١٣}$

نواتج التعلّم

يتعرّف العدد المركّب ع = أ + بت ويميّز مكوّنيه: الجزء الحقيقي والجزء التخيّلي. ويجري العمليات الحسابية (الجمع والطرح والضرب والقسمة) على الأعداد المركّبة، ويضع الناتج في أبسط صورة.

إشارات أجزائها التخيّلية متعاكسة.

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ اذكر المرافق المركّب لكلٍّ من الأعداد المركّبة الآتية.

(أ) $٢ + ٣ت$ (ب) $٧ - ت$ (جـ) $\sqrt{١١}$ (د) $-٥ت$

٢ احسب ما يأتي وأجِب في الصورة أ + بت.

(أ) $\frac{٢ + ت}{٢ - ت}$ (ب) $\frac{٣ - ت}{٢ت}$

طريقة الحل

١ اعكِس إشارة الجزء التخيّلي.

مرافق ٦ + ٠ت هو ٦ – ٠ت

(أ) $٢ - ٣ت$ (ب) $٧ + ت$ (جـ) $\sqrt{١١}$ (د) ٦

مرافق ٠ – ٥ت هو ٠ + ٥ت

٢ (أ) $\frac{٢ + ت}{٢ - ت}$

اضرب البسط والمقام في ٢ + ت

$= \frac{(٢ + ت)^{٢}}{(٢ - ت)(٢ + ت)} = \frac{٤ + ٤ت + ت^{٢}}{٤ - ت^{٢}}$

$= \frac{٤ + ٤ت + (-١)}{٤ - (-١)} = \frac{٣ + ٤ت}{٥}$

أجِب في الصورة أ + بت

$= \frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥}ت$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

(ب) $\frac{٣ - ت}{ت٢}$

اضرب البسط والمقام في $-ت٢$

$= \frac{(٣ - ت)(-ت٢)}{ت٢(-ت٢)} = \frac{-٦ت + ت٢^{٢}}{-٤ت^{٢}}$

$= \frac{-٦ت + ٢ \times (-١)}{-٤ \times (-١)}$

بسّط الكسر.

$= \frac{-٢ - ٦ت}{٤}$

أجِب في الصورة أ + بت.

$= -\frac{١}{٢} - \frac{٣}{٢}ت$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ اذكر المرافق المركّب لكلٍّ من الأعداد المركّبة الآتية.

(أ) $١ - ٤ت$ (ب) $\sqrt{٢} + ت\sqrt{١٠}$ (ج) ٢ (د) $-٨ت$

٢ احسب ما يأتي وأجِب في الصورة أ + بت.

(أ) $\frac{٣ + ت}{١ + ت٢}$ (ب) $\frac{١ - ت}{ت}$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ اذكر المرافق المركّب لكلٍّ من الأعداد المركّبة الآتية.

(أ) $٣ + ٤ت$ (ب) $٩ + ٨ت$ (ج) $٨ + ت\sqrt[٣]{}$

(د) ٥ (هـ) -١٥ (و) $\sqrt{٧}$

(ز) ت (ح) $-٥٠ت$

(ط) $ت\sqrt[٦]{}$

٢ احسب ما يأتي وأجِب في الصورة أ + بت.

(أ) $\frac{١ + ت}{١ - ت}$ (ب) $\frac{٣ + ت}{٢ + ت}$ (ج) $\frac{٥\sqrt{} + ت}{٥\sqrt{} - ت}$ (د) $\frac{٥ت}{١ + ت٢}$

(هـ) $\frac{٥ت}{٤ + ٣ت}$ (و) $\frac{١ - ٣ت}{٢ - ٣}$ (ز) $\frac{١}{ت}$ (ح) $\frac{٢ + ت}{٣ت}$

★ التحدّي

أجرِ العملية المبيَّنة واكتب إجابتك في الصورة القياسية.

$$\left(\frac{ت(١٠ - ١٢ت)}{(٢ + ت)(-١ + ٤ت)}\right)^{٢٠٢٧}$$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٤-٣ الجذور التربيعية للأعداد السالبة

الرياضيات

الفصل الثالث الأعداد المركّبة والمعادلات

لاحِظ!

- عندما أ > ٠، $\sqrt{-أ} = ت\sqrt{أ}$
- عندما يكون داخل الجذر التربيعي عددًا سالبًا، احسب بعد التعبير عنه في **صورة بدلالة ت**.

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ عبِّر عن الجذرين التربيعيين لـ –٦ بدلالة ت.

٢ احسب ما يأتي.

(أ) $\sqrt{-٦} \times \sqrt{-١٢}$ (ب) $\frac{\sqrt{٨}}{\sqrt{-١٢٨}}$

طريقة الحل

١ الجذران التربيعيان لـ –٦ هما $\pm\sqrt{-٦} = \pm ت\sqrt{٦}$

٢ (أ) $\sqrt{-٦} \times \sqrt{-١٢}$

عبِّر أوّلًا بدلالة ت

$= ت\sqrt{١٢} \times ت\sqrt{٦}$

$= ت٢\sqrt{٣} \times ت\sqrt{٦}$

عوّض $ت^{٢} = -١$

$= ت٦^{٢}\sqrt{٢}$

$= ٦-\sqrt{٢} \times (-١) = -٦\sqrt{٢}$

(ب) $\frac{\sqrt{٨}}{\sqrt{-١٨}}$

اضرب البسط والمقام في –٣ت (أو أبسط: في ت).

$= \frac{٢\sqrt{٣}}{٣\sqrt{٢} ت}$

$= \frac{-٦ت}{٩}$

$= -\frac{٢}{٣}ت$

نواتج التعلّم

يحسب الجذور التربيعية للأعداد السالبة والأعداد المركّبة.

تصوّرات خاطئة

الظنّ بأن $\sqrt{-ن}$ غير معرَّف أو مستحيل: قد يعتقد الطلاب أن الأعداد السالبة لا جذور تربيعية لها إطلاقًا، بدل إدراك أن الأعداد المركّبة توسّع النظام العددي ليصير ذلك ممكنًا.

الخلط في الإشارات: يفترض بعضهم أن $\sqrt{-ن} = -\sqrt{ن}$ وهذا غير صحيح؛ والصورة الصحيحة $\sqrt{-ن} = ت\sqrt{ن}$.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ عبِّر عن الأعداد الآتية بدلالة ت.

(أ) $\sqrt{-٧}$ (ب) $-\sqrt{٢٧}$ (جـ) $-\sqrt{-١٢}$ (د) الجذران التربيعيان لـ -١٢

٢ احسب ما يأتي.

(أ) $\sqrt{-٣} \times \sqrt{-٦}$ (ب) $\frac{\sqrt{٣٧}}{\sqrt{-٣}}$ (جـ) $(٣ + \sqrt{-٢})^{٢}$

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ عبِّر عن الأعداد الآتية بدلالة ت.

(أ) $\sqrt{-٢}$ (ب) $\sqrt{-٩}$

(جـ) $\sqrt{-٤٥}$ (د) $-\sqrt{-٢٤}$

(هـ) $-\sqrt{-٣٦}$ (و) الجذران التربيعيان لـ -٢

(ز) الجذران التربيعيان لـ -١٨ (ح) الجذران التربيعيان لـ -١٦

٢ احسب ما يأتي.

(أ) $\sqrt{-٢} \times \sqrt{-٦}$ (ب) $\sqrt{-٢٨} \times \sqrt{-٣٥}$

(جـ) $\frac{\sqrt{٨}}{\sqrt{-٢}}$ (د) $\frac{\sqrt{٢٧}}{\sqrt{-١٢}}$

(هـ) $\sqrt{-٣٢} + \sqrt{-٩٨} + \sqrt{-٨}$ (و) $\sqrt{-٩٨} - \sqrt{-٧٢} + \sqrt{-٥٠}$

(ز) $(\sqrt{٣} + \sqrt{-٥})^{٢}$ (ح) $(٢ + \sqrt{-٣})(٢ - \sqrt{-٣})$

★ التحدّي

حلّ: $(٢س - ٨)^{٢} = -١٠$

تأمّل

بالنظر إلى أنّ توسيع نظامنا العددي من المستقيم الحقيقي إلى المستوى ثنائي البُعد أتاح لنا حساب أمور كمُمانَعة الأنسجة ومعالجة الصوت، كيف يغيّر ذلك نظرتك إلى ما يجعل مفهومًا رياضيًّا «حقيقيًّا» في مقابل «تخيّليّ»؟

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٥-٣
الرياضيات

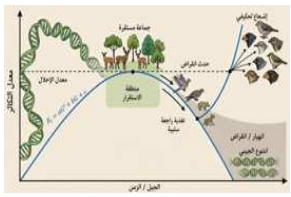
حلول المعادلات التربيعية

الفصل الثالث الأعداد المركّبة والمعادلات

نواتج التعلّم

يحلّ المعادلات التربيعية في مجموعة الأعداد المركّبة.

المفهوم ٢ ٠ المعادلات التربيعية



يدرس علماء الأحياء التطوّرية كيف تنتشر السمات الوراثية في المجتمعات الحيوية مع مرور الزمن، ليحدّدوا هل يتكيّف النوع أم يستقرّ أم يواجه الانقراض. ولنمذجة التفاعلات بين المتغيّرات الوراثية المتنافسة تحت الانتخاب الطبيعي، يستعملون الرياضيات لتمثيل معدّلات التكاثر وآثار الأجيال. وعند نقطة التوازن بين السمات الوراثية والضغوط البيئية، تتّخذ المعادلات صورة تعبيرات تربيعية تساعد على التنبّؤ بما إذا كان المجتمع مستقرًّا أم معرَّضًا للانهيار.

السؤال الموجّه: كيف تساعدنا المعادلات التربيعية على تحديد ما إذا كان نظام في علوم الحياة أو الهندسة سيبقى مستقرًّا أم ينهار؟

لاحظ!

- عندما يكون داخل الجذر التربيعي سالبًا، عبّر عنه في **صورة بدلالة ت**
- كيفية حلّ المعادلات التربيعية.

(أ) الحلّ باستخدام مفهوم الجذور التربيعية.

حلول $س^{٢} = أ$ هي $س = \pm\sqrt{أ}$

بالنسبة لـ $(س + م)^{٢} = أ$، حوّل إلى $س + م = \pm\sqrt{أ}$ ، إذن $س = -م \pm \sqrt{أ}$

(ب) الحلّ باستخدام التحليل إلى عوامل.

حلول $س(س - أ) = ٠$ هي $س = ٠$ **أو** $أ$

حلول $(س - أ)(س - ب) = ٠$ هي $س = أ$ **أو** $ب$

حلّ $(س - أ)^{٢} = ٠$ هو $س = أ$

حلول $(أس - ب)(ج س - د) = ٠$ هي $س = \frac{ب}{أ}$ **أو** $\frac{د}{ج}$

(جـ) الحلّ باستخدام القانون العام.

حلول $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$ هي $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

استعد

حلّ المعادلات التربيعية الآتية.

(أ) $س^{٢} + ٨ = ٠$ (ب) $٢س^{٢} - ٧س - ٩ = ٠$ (جـ) $٢س^{٢} + ٢\sqrt{٦}س + ١١ = ٠$

طريقة الحل

(أ) $س^{٢} + ٨ = ٠$

كوّن الصورة «$س^{٢} =$ ».

$س^{٢} = -٨$

أزِل التربيع من الطرف الأيمن وأضِف $\pm\sqrt{\ }$ إلى الطرف الأيسر.

$س = \pm\sqrt{-٨}$

عبِّر بدلالة ت.

$س = \pm ت\sqrt{٨}$

$س = \pm ٢ت\sqrt{٢}$

(ب) $٢س^{٢} - ٧س - ٩ = ٠$

استخدم طريقة الضرب التبادلي.

$(س + ١)(٢س - ٩) = ٠$

$س = -١$ أو $\frac{٩}{٢}$

(جـ) $٢س^{٢} + ٢\sqrt{٦}س + ١١ = ٠$

استخدم القانون العام.

$س = \frac{-٢\sqrt{٦} \pm \sqrt{(٢\sqrt{٦})^{٢} - ٤ \times ٢ \times ١١}}{٢ \times ٢}$

$س = \frac{-٢\sqrt{٦} \pm \sqrt{-٦٤}}{٤}$

عبِّر بدلالة ت.

$س = \frac{-٢\sqrt{٦} \pm ت\sqrt{٦٤}}{٤}$

$س = \frac{-٢\sqrt{٦} \pm ٨ت}{٤}$

بسّط الكسر.

$س = \frac{-\sqrt{٦} \pm ٤ت}{٢}$

حاول

حلّ المعادلات التربيعية الآتية.

(أ) $س^{٢} + ٤ = ٠$

(ب) $(س - ٣)^{٢} = -٨$

(جـ) $٢س^{٢} + ٥س - ٣ = ٠$

(د) $٢س^{٢} + ٢\sqrt{٣}س + ٥ = ٠$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ حلّ المعادلات التربيعية الآتية.

(أ) $س^{٢} + ٤٩ = ٠$

(ب) $٩س^{٢} - ٤ = ٠$

(ج) $(س - ٢)^{٢} = ٥$

(د) $(س + ٦)^{٢} = -٦$

(هـ) $٢س^{٢} + ٧س = ٠$

(و) $٢س^{٢} + ٥س - ١٢ = ٠$

(ز) $س^{٢} + س + ١ = ٠$

(ح) $٣س^{٢} - ٥س + ٣ = ٠$

(ط) $س^{٢} - ٢\sqrt{٣}س + ٥ = ٠$

(ي) $٣س^{٢} + ٢\sqrt{٢}س + ١ = ٠$

٢ حلّ المعادلات التربيعية الآتية.

(أ) $س^{٢} - س + ٢ = ٠$

(ب) $(س + ٤)^{٢} = -١٨$

(ج) $س^{٢} - ١٢ = ٠$

(د) $٣س^{٢} - ٤س - ١ = ٠$

(هـ) $س^{٢} - ٨س + ١٥ = ٠$

(و) $٤س^{٢} + ٣ = ٠$

(ز) $٣س^{٢} - \sqrt{٥}س + ١ = ٠$

(ح) $٦س^{٢} - ١٢س + ١٥ = ٠$

(ط) $(٢س - ٣)^{٢} = ٧$

★ التحدّي

يدرس فريق بحثي اهتزازات غشاء رقيق في جهاز طبّي يستعمل الموجات فوق الصوتية. والعلاقة بين سعة الاهتزاز س ومعدّل انتقال الطاقة ر تُعطى بالصيغة:

$$ر = ٣س^{٢} + ٢\sqrt{٣}س + ٢$$

حدِّد قيم س التي تجعل النظام يبلغ حالة الاتزان (حين يكون معدّل انتقال الطاقة صفرًا). ثم وضّح معنى النتيجة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٦-٣
الرياضيات

مميّز المعادلات التربيعية

الفصل الثالث الأعداد المركّبة والمعادلات

لاحِظ!

التعبير المستخدم لتحديد نوع وعدد حلول المعادلة التربيعية أس^{٢} + ب س + ج = ٠ يُسمّى **المميّز**، ويُرمَز له بـ د.

د = ب^{٢} – ٤أج

عندما د > ٠، يكون لها **حلّان حقيقيان مختلفان**.
عندما د = ٠، يكون لها **حلّ مكرّر (حلّ حقيقي واحد)**.
عندما د < ٠، يكون لها **حلّان تخيليان مختلفان**.

وعندما د ≥ ٠، يكون لها حلول حقيقية.

داخل الجذر التربيعي في القانون التربيعي.

عندما د ≥ ٠ تكون الحلول حقيقية.

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ حدّد طبيعة حلول المعادلة التربيعية ٣س^{٢} + ٤س + ٧ = ٠

٢ أوجد مجموعة قيم الثابت م التي تجعل المعادلة التربيعية
س^{٢} – مس + م^{٢} – ٣م – ٩ = ٠ ذات حلول حقيقية.

٣ لتكن ك ثابتًا حقيقيًّا. حدّد طبيعة حلول المعادلة التربيعية س^{٢} + كس + ٣ – ك = ٠

طريقة الحل

١ لتكن د مميّز المعادلة ٣س^{٢} + ٤س + ٧ = ٠

عوّض أ = ٣ ، ب = ٤ ، ج = ٧ في المميّز.

د = ٤^{٢} – ٤ × ٣ × ٧ = ١٦ – ٨٤ = –٦٨ < ٠

إذن، **يكون لها حلّان تخيليان مختلفان**.

نواتج التعلّم

يحدّد طبيعة الجذرين باستخدام المميّز، ويوظّف ذلك في حلّ المسائل الرياضية.

تصوّرات خاطئة

سوء تفسير النتيجة. Δ < ٠: الظنّ بأنه «لا حلول إطلاقًا»، والصواب حلّان مركّبان. Δ = ٠: الظنّ بأنه «لا حلول»، والصواب حلّ حقيقي واحد مكرّر. Δ < ٠: الظنّ بأن الحلّ «واحد فقط»، والصواب حلّان حقيقيان مختلفان.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢ لتكن Δ مميّز المعادلة $س^{٢} - ٣م س + م^{٢} - ٣م - ٩ = ٠$، وبما أنّ $د \geq ٠$.

عوّض أ = ١ ، ب = –م ، ج = $م^{٢} - ٣م - ٩$ في المميّز.

$(-م)^{٢} - ٤(م^{٢} - ٣م - ٩) \geq ٠$

$-٣م^{٢} + ١٢م + ٣٦ \geq ٠$

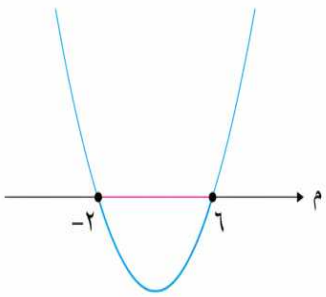
اعكس إشارة المتباينة.

$٣م^{٢} - ١٢م - ٣٦ \leq ٠$

$م^{٢} - ٤م - ١٢ \leq ٠$

$(م + ٢)(م - ٦) \leq ٠$

إذن، $-٢ \leq م \leq ٦$



٣ لتكن د مميّز المعادلة $س^{٢} + كس + ٣ - ك = ٠$

$د = ك^{٢} - ٤(٣ - ك)$

$= ك^{٢} + ٤ك - ١٢$

$= (ك - ٢)(ك + ٦)$

[١] عندما $د > ٠$، أي $(ك - ٢)(ك + ٦) > ٠$:

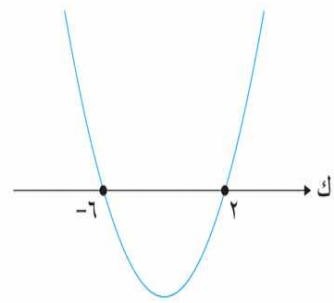
بحلّ هذه المتباينة نجد: عندما $ك < -٦$ أو $ك > ٢$، يكون لها حلّان حقيقيان مختلفان.

[٢] عندما $د = ٠$، أي $(ك - ٢)(ك + ٦) = ٠$:

بحلّ هذه المعادلة نجد: عندما $ك = -٦ ، ٢$، يكون لها حلّ مكرّر.

[٣] عندما $د < ٠$، أي $(ك - ٢)(ك + ٦) < ٠$:

بحلّ هذه المتباينة نجد: عندما $-٦ < ك < ٢$، يكون لها حلّان تخيليان مختلفان.



تلخيص ما سبق:

عندما $ك < -٦$ أو $ك > ٢$، يكون لها حلّان حقيقيان مختلفان.

عندما $ك = -٦ ، ٢$، يكون لها حلّ مكرّر.

عندما $-٦ < ك < ٢$، يكون لها حلّان تخيليان مختلفان.

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ حدّد طبيعة حلول المعادلات التربيعية الآتية.

(أ) $٣س^{٢} - ٥س + ٤ = ٠$ (ب) $٤س^{٢} - ٧س - ٢ = ٠$ (جـ) $٢٥س^{٢} - ١٠س + ١ = ٠$

٢ أوجد مجموعة قيم الثابت م التي تجعل المعادلة التربيعية $س^{٢} - ٢م س + م + ٢ = ٠$ ذات حلّين تخيليين مختلفين.

٣ لتكن أ ثابتًا حقيقيًّا. حدّد طبيعة حلول المعادلة التربيعية $س^{٢} - أس + أ^{٢} - ٣ = ٠$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ حدّد طبيعة حلول المعادلات التربيعية الآتية.

(أ) $س^{٢} - ٥س + ٣ = ٠$ (ب) $٩س^{٢} - ١٢س + ٤ = ٠$ (جـ) $٤س^{٢} - ٨س + ٥ = ٠$

(د) $٤س^{٢} - ٤س + ١ = ٠$ (هـ) $س^{٢} - ٣س + ٥ = ٠$ (و) $س^{٢} - س - ٢ = ٠$

٢ حلّ المسائل الآتية.

(أ) أوجد قيمة (قيم) الثابت أ التي تجعل للمعادلة التربيعية $س^{٢} - (أ + ١)س + ٤ = ٠$ حلًّا مكرّرًا.

(ب) أوجد مجموعة قيم الثابت م التي تجعل للمعادلة التربيعية $س^{٢} + (م + ٦)س - ٢م = ٠$ حلّين تخيليين مختلفين.

(جـ) أوجد مجموعة قيم الثابت م التي تجعل للمعادلة التربيعية $س^{٢} - ٢مس + ٢م^{٢} - ٣م = ٠$ حلولًا حقيقية.

★ التحدّي

حلّ المسائل الآتية.

(أ) لتكن أ ثابتًا حقيقيًّا. حدّد طبيعة حلول المعادلة التربيعية $س^{٢} + أس - أ = ٠$

(ب) لتكن ك ثابتًا حقيقيًّا. حدّد طبيعة حلول المعادلة التربيعية

$س^{٢} - (ك + ٢)س + ك^{٢} = ٠$

(جـ) لتكن أ ثابتًا حقيقيًّا. حدّد طبيعة حلول المعادلة التربيعية

$س^{٢} - ٢(أ - ١)س + أ^{٢} - ٣أ + ٤ = ٠$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٧-٣ العلاقة بين الجذرين والمعاملات (١)

الرياضيات

الفصل الثالث الأعداد المركّبة والمعادلات

لاحِظ!

العلاقة بين الجذور والمعاملات

عندما يكون حلّا (جذرا) أس^{٢} + بس + ج = ٠ هما α ، β،

$$\alpha + \beta = -\frac{ب}{أ}$$

$$\alpha\beta = \frac{ج}{أ}$$

لإيجاد قيم التعبيرات المتعلقة بحلول المعادلات التربيعية، أوجد أوّلًا قيمتَي $\alpha + \beta$ و$\alpha\beta$.

أعِد كتابة التعبير المعطى بدلالة $\alpha + \beta$ و$\alpha\beta$، وحلّ باستخدام العلاقة بين الجذور والمعاملات.

وعلى وجه الخصوص، كثيرًا ما تُستخدم التحويلات الآتية.

$$\alpha^{٢} + \beta^{٢} = (\alpha + \beta)^{٢} - ٢\alpha\beta$$

$$\alpha^{٣} + \beta^{٣} = (\alpha + \beta)^{٣} - ٣\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد مجموع وحاصل ضرب حلَّي المعادلة التربيعية ٣س^{٢} – ٦س – ٥ = ٠

٢ لتكن α وβ حلَّي المعادلة التربيعية ٢س^{٢} – ٦س – ٣ = ٠ . أوجد قيمة التعبيرات الآتية.

(أ) $\alpha^{٢} + \beta^{٢}$ (ب) $\alpha^{٣} + \beta^{٣}$

(جـ) $\frac{٢}{\alpha} + \frac{٢}{\beta}$ (د) $(١ + \alpha)(١ + \beta)$

طريقة الحل

١ ٣س^{٢} – ٦س – ٥ = ٠

من العلاقة بين الجذور والمعاملات، مجموع الحلَّين هو $-\frac{(-٦)}{٣} = ٢$

وحاصل ضرب الحلَّين هو $\frac{(-٥)}{٣} = -\frac{٥}{٣}$

$\alpha + \beta = -\frac{ب}{أ}$

$\alpha\beta = \frac{ج}{أ}$

نواتج التعلّم

يستنتج العلاقات الرياضية بين جذري المعادلة التربيعية ومعاملاتها، ويوظّفها في حلّ المسائل الرياضية.

تصوّرات خاطئة

الخلط بين المجموع وحاصل الضرب: يبدّل بعض الطلاب بينهما فيظنّون أن حاصل الضرب $-\frac{ب}{أ}$ والمجموع $\frac{ج}{أ}$. وإهمال المعامل أ: يفترض بعضهم أن الصيغتين –ب وج فحسب، فينسى القسمة على أ .

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢ $٢س^{٢} - ٦س - ٣ = ٠$

أوجد أوّلًا قيمتَي $\alpha + \beta$ و$\beta\alpha$.

$\alpha + \beta = ٣ \cdot \beta\alpha = -\frac{٣}{٢}$

(أ) $\alpha^{٢} + \beta^{٢} = (\alpha + \beta)^{٢} - ٢\beta\alpha$

$= ٣^{٢} - ٢ \times \left(-\frac{٣}{٢}\right)$

$= ٩ + ٣ = ١٢$

(ب) $\alpha^{٣} + \beta^{٣} = (\alpha + \beta)^{٣} - ٣\beta\alpha(\alpha + \beta)$

$= ٣^{٣} - ٣ \times \left(-\frac{٣}{٢}\right) \times ٣$

$= ٢٧ + \frac{٢٧}{٢} = \frac{٨١}{٢}$

اضرب كلًّا من البسط والمقام في ٢.

(جـ) $\frac{٢}{\alpha} + \frac{٢}{\beta} = \frac{\alpha^{٢} + \beta^{٢}}{\beta\alpha} = \frac{(\alpha + \beta)^{٢}}{\beta\alpha}$

$= \frac{٣ \times ٢}{-\frac{٣}{٢}} = \underline{-٤}$

(د) $(١ + \alpha)(١ + \beta) = ١ + \alpha + \beta + \beta\alpha$

$= ١ + ٣ + \left(-\frac{٣}{٢}\right) = \frac{٥}{٢}$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد مجموع وحاصل ضرب حلَّي المعادلة التربيعية $٤س^{٢} + ٢س - ٧ = ٠$

٢ لتكن α وβ حلَّي المعادلة التربيعية $٢س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠$. أوجد قيمة التعبيرات الآتية.

(أ) $\alpha^{٢} + \beta^{٢}$

(ب) $\alpha^{٣} + \beta^{٣}$

(جـ) $\frac{\alpha + \beta}{\beta\alpha}$

(د) $(١ - \alpha)(١ - \beta)$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد مجموع وحاصل ضرب حلَّي المعادلات التربيعية الآتية.

(أ) $س^{٢} + س + ٢ = ٠$ (ب) $٣س^{٢} - ٧س - ٦ = ٠$ (جـ) $٥س^{٢} - ٣ = ٠$

٢ لتكن α وβ حلَّي المعادلة التربيعية $س^{٢} - ٢س + ٣ = ٠$. أوجد قيمة التعبيرات الآتية.

(أ) $\alpha^{٢} + \beta^{٢}$ (ب) $\alpha^{٣} + \beta^{٣}$

(جـ) $\frac{١}{\alpha} + \frac{١}{\beta}$ (د) $(٢ + \alpha)(٢ + \beta)$

٣ لتكن α وβ حلَّي المعادلة التربيعية $٣س^{٢} + ٦س - ١ = ٠$. أوجد قيمة التعبيرات الآتية.

(أ) $\alpha^{٢} + \beta^{٢}$ (ب) $\alpha^{٣} + \beta^{٣}$

(جـ) $\frac{١}{\alpha} + \frac{١}{\beta}$ (د) $(٢ - \alpha)(٢ - \beta)$

★ التحدّي

لتكن α وβ حلَّي المعادلة التربيعية $٢س^{٢} - ٦س + ٣ = ٠$. أوجد قيمة التعبيرات الآتية.

(أ) $\alpha\beta^{٢} + \alpha^{٢}\beta$ (ب) $(\alpha - \beta)^{٢}$

(جـ) $\alpha^{٣} + \beta^{٣}$ (د) $\frac{\alpha^{٢}}{\beta} + \frac{\beta^{٢}}{\alpha}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٨-٣
الرياضيات

العلاقة بين الجذور والمعاملات (٢)

(العلاقة بين الجذرين)
الفصل الثالث الأعداد المركّبة والمعادلات

نواتج التعلّم
يستنتج العلاقات الرياضية بين جذري المعادلة التربيعية ومعاملاتها، ويوظّفها في حلّ المسائل الرياضية.

لاحِظ!

في المسائل التي تكون فيها العلاقة بين الحلَّين معلومة، **لتكن α هي** أحد الحلَّين، وللآخر، **عبِّر عنه بدلالة α**.

استعد

إذا كان الفرق بين حلَّي المعادلة التربيعية $س^{٢} - (م - ١)س - ٦ = ٠$ يساوي ٥، أوجد قيمة الثابت م والحلَّين.

طريقة الحل

لتكن إحدى حلَّي $س^{٢} - (م - ١)س - ٦ = ٠$ هي α، يمكن التعبير عن الحلّ الآخر بـ $\alpha + ٥$

من العلاقة بين الجذور والمعاملات:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + (\alpha + ٥) = م - ١ \quad \ldots\ldots (أ) \\ \alpha(\alpha + ٥) = -٦ \quad \ldots\ldots (ب) \end{array}\right\}$$

بحلّ (ب) نجد $\alpha = -٢ ، -٣$

عندما $\alpha = -٢$، من (أ)، $م = ٢$

عوّض $\alpha = -٢$ في (أ) لإيجاد الحلّ.

كذلك، الحلّ الآخر في هذه الحالة هو $\alpha + ٥ = -٢ + ٥ = ٣$

عندما $\alpha = -٣$، من (أ)، $م = ٠$

عوّض $\alpha = -٣$ في (أ) لإيجاد الحلّ.

كذلك، الحلّ الآخر في هذه الحالة هو $\alpha + ٥ = -٣ + ٥ = ٢$

إذن،

عندما $م = ٢$، الحلّان هما $-٢ ، ٣$

عندما $م = ٠$، الحلّان هما $-٣ ، ٢$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان أحد حلَّي المعادلة التربيعية $س^{٢} - ٨س + ك = ٠$ يساوي ٣ أمثال الحلّ الآخر، أوجد قيمة الثابت ك والحلَّين.

٢ إذا كان الفرق بين حلَّي المعادلة التربيعية $س^{٢} - (م + ١)س + ٢ = ٠$ يساوي ١، أوجد قيمة الثابت م والحلَّين.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان أحد حلَّي المعادلة التربيعية $س^{٢} + ٦س + م = ٠$ يساوي ٢ مثلَي الحلّ الآخر، أوجد قيمة الثابت م والحلَّين.

٢ إذا كان أحد حلَّي المعادلة التربيعية $٨س^{٢} - مس + ١ = ٠$ يساوي ٢ مثلَي الحلّ الآخر، أوجد قيمة الثابت م والحلَّين.

٣ إذا كان الفرق بين حلَّي المعادلة التربيعية $س^{٢} + ٦س + م = ٠$ يساوي ٤، أوجد قيمة الثابت م والحلَّين.

٤ إذا كان الفرق بين حلَّي المعادلة التربيعية $٤س^{٢} + مس + ٣ = ٠$ يساوي ١، أوجد قيمة الثابت م والحلَّين.

٥ إذا كانت نسبة حلَّي المعادلة التربيعية $س^{٢} - ٢س + م = ٠$ هي ٢ : ٣، أوجد قيمة الثابت م والحلَّين.

٦ إذا كان أحد حلَّي المعادلة التربيعية $س^{٢} - ٦س + ك = ٠$ هو مربّع الحلّ الآخر، أوجد قيمة الثابت ك والحلَّين.

★ التحدّي

للمعادلتين $س^{٢} + أس + ب ج = ٠$ و$س^{٢} + بس + ج أ = ٠$ جذرٌ مشترك لا يساوي صفرًا، و$أ \neq ب$. أثبت أنّ الجذرين الآخرين هما جذرا المعادلة التربيعية $س^{٢} + جس + أب = ٠$، حيث $ج \neq ٠$.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٣-٩ تحليل التعبيرات التربيعية إلى عوامل

الرياضيات

الفصل الثالث الأعداد المركّبة والمعادلات

لاحظ!

لتكن α وβ حلّي $أس^{٢} + بس + ج = ٠$، يمكن تحليلها إلى عوامل على النحو الآتي:

$$أس^{٢} + بس + ج = أ(س - \alpha)(س - \beta)$$

استعد

حلّل التعبيرات الآتية إلى عوامل على مجموعة الأعداد المركّبة.

(أ) $٢س^{٢} - ٣س + ٢$ (ب) $س^{٤} + ٢س^{٢} - ٣$

طريقة الحل

(أ) بحلّ $٢س^{٢} - ٣س + ٢ = ٠$ باستخدام القانون التربيعي نجد أنّ $س = \frac{٣ \pm ت\sqrt{٧}}{٤}$

إذن،

$$٢س^{٢} - ٣س + ٢ = ٢\left(س - \frac{٣ + ت\sqrt{٧}}{٤}\right)\left(س - \frac{٣ - ت\sqrt{٧}}{٤}\right)$$

(ب) $س^{٤} + ٢س^{٢} - ٣ = (س^{٢} - ١)(س^{٢} + ٣)$

$= (س + ١)(س - ١)(س^{٢} + ٣)$

وبحلّ $س^{٢} + ٣ = ٠$ نجد أنّ $س = \pm ت\sqrt{٣}$

إذن، $س^{٢} + ٣ = (س + ت\sqrt{٣})(س - ت\sqrt{٣})$

وبذلك، $س^{٤} + ٢س^{٢} - ٣ = (س + ١)(س - ١)(س + ت\sqrt{٣})(س - ت\sqrt{٣})$

حاول

حلّل التعبيرات الآتية إلى عوامل على مجموعة الأعداد المركّبة.

(أ) $س^{٢} + ٢س + ٥$ (ب) $٢س^{٢} - ٦س + ١$ (ج) $س^{٤} - س^{٢} - ٦$

نواتج التعلّم

يحلّل المقادير التربيعية إلى عواملها في مجموعة الأعداد المركّبة.

تصوّرات خاطئة

نسيان معامل $س^{٢}$: كثيرًا ما يحاول الطلاب تفكيك الحدّ الأوسط بلا نظر إلى المعامل الرئيسي أ. وافتراض أن كل تربيعية تُحلّل بسهولة: يظنّ بعضهم أن كل معادلة تربيعية تُحلّل إلى أعداد صحيحة. مُهملين الحالات التي لا يكون فيها المميّز مربّعًا كاملًا.

احرص على عدم نسيان المعامل أ الخاص بـ $س^{٢}$.

احرص على عدم نسيان المعامل ٢ الخاص بـ $س^{٢}$.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدريب

حلّل التعبيرات الآتية إلى عوامل على مجموعة الأعداد المركّبة.

(أ) $س^{٢} + ٤س + ٥$

(ب) $س^{٢} + ٤س + ٢$

(جـ) $س^{٢} - ٤س + ٧$

(د) $٢س^{٢} - س + ١$

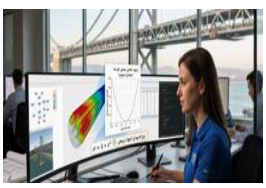
(هـ) $٣س^{٢} - ٥س + ٣$

(و) $٢س^{٢} - ٢س - ١$

(ز) $س^{٤} - ٩$

(ح) $س^{٤} - ٣س^{٢} + ٢$

★ التحدّي — إجهاد كابل جسر معلّق



يصمّم مهندس جسرًا معلّقًا، ويضع نموذجًا للإجهاد على أحد كابلاته. ويتوقّف الإجهاد على مربّع الإزاحة $س^{٢}$، ويُعبَّر عن اتزان القوى كلّها بالمعادلة الآتية:

$$م(س) = ٦س^{٤} - ٧س^{٢} - ٣$$

حلّل المعادلة لتعيين القيم الممكنة لـس، وفسّر ما تعنيه هذه القيم في سياق ثبات الكابل تحت الحمل.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٣-١٠
الرياضيات

المعادلات التربيعية ذات الحلّين المعطيين

الفصل الثالث الأعداد المركّبة والمعادلات

لاحظ!

معادلة تربيعية واحدة بحلّين هما α ، β هي

$$س^{٢} - (\alpha + \beta)س + \alpha\beta = ٠$$

نواتج التعلّم

يكوّن معادلة تربيعية إذا عُلم جذراها.

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ أنشئ معادلة تربيعية واحدة بمعاملات صحيحة لها العددان $\frac{١+\sqrt{٣}}{٢}$ و $\frac{١-\sqrt{٣}}{٢}$ حلّين لها.

٢ أوجد عددين مجموعهما –١ وحاصل ضربهما ٢

٣ لتكن α ، β حلّي المعادلة التربيعية $س^{٢} + ٢س - ٤ = ٠$. أوجد معادلة تربيعية معامل $س^{٢}$ فيها ١، لها $\alpha + ٢$ و $\beta + ٢$ حلّين.

طريقة الحل

١ لمعادلة تربيعية حلّاها $\frac{١+\sqrt{٣}}{٢}$ و $\frac{١-\sqrt{٣}}{٢}$

مجموع الحلّين: $\frac{١+\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١-\sqrt{٣}}{٢} = ١$

حاصل ضرب الحلّين: $\frac{١+\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١-\sqrt{٣}}{٢} = \frac{١}{٢}$

إذن، إحدى هذه المعادلات هي:

إحدى المعادلات التربيعية التي جذراها α و β هي
$س^{٢} - (\alpha + \beta)س + \alpha\beta = ٠$

$$س^{٢} - س + \frac{١}{٢} = ٠$$

اضرب طرفي المعادلة في ٢ لتصبح المعاملات أعدادًا صحيحة.

$$٢س^{٢} - ٢س + ١ = ٠$$

٢ أنشئ معادلة تربيعية حلولها هما العددان. لتكن هذان العددان α ، β

$$\alpha + \beta = -١$$

$$\alpha\beta = ٢$$

إحدى المعادلات التربيعية التي جذراها α و β هي
$س^{٢} - (\alpha + \beta)س + \alpha\beta = ٠$

بمعنى آخر، العددان هما حلّا $س^{٢} + س + ٢ = ٠$

بحلّ هذه المعادلة نجد س $= \frac{-١ \pm \sqrt{٧}ت}{٢}$

إذن، العددان هما $\frac{-١+\sqrt{٧}ت}{٢}$ ، $\frac{-١-\sqrt{٧}ت}{٢}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٣ بما أنّ α ، β حلّا س^{٢} + ٢س – ٤ = ٠ ، من العلاقة بين الجذور والمعاملات:

$\alpha + \beta = -٢$ ..... (أ)

$\alpha\beta = -٤$ ..... (ب)

لتكن المعادلة التربيعية المطلوبة س^{٢} + بس + ج = ٠

وبما أنّ حلّي هذه المعادلة التربيعية هما α + ٢ ، β + ٢، من العلاقة بين الجذور والمعاملات:

ب = –{$(\alpha + ٢) + (\beta + ٢)$}

$= -(\alpha + \beta + ٤)$ ← من (أ)، $\alpha + \beta = -٢$

$= -(-٢ + ٤) = -٢$

ج = $(\alpha + ٢)(\beta + ٢)$

$= \alpha\beta + ٢(\alpha + \beta) + ٤$ ← من (أ) و(ب)، $\alpha + \beta = -٢$ ، $\alpha\beta = -٤$

$= -٤ + ٢ \times (-٢) + ٤ = -٤$

إذن، المعادلة التربيعية المطلوبة هي س^{٢} – ٢س – ٤ = ٠

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أنشئ معادلة تربيعية واحدة لها العددان ٣ + ٢ت و٣ – ٢ت حلّين.

٢ أوجد عددين مجموعهما وحاصل ضربهما كلاهما ١

٣ لتكن α ، β حلّي المعادلة التربيعية س^{٢} + س – ٣ = ٠ . أوجد معادلة تربيعية واحدة لها $\alpha^{٢}$ و$\beta^{٢}$ حلّين.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ أنشئ معادلة تربيعية واحدة لها العددان الآتيان حلّين.

(أ) ٢ ، ١– (ب) ١ + ٤ت ، ١ – ٤ت (ج) $\frac{٥ + \sqrt{٧}}{٣}$ ، $\frac{٥ - \sqrt{٧}}{٣}$

٢ أوجد عددين مجموعهما وحاصل ضربهما كما يأتي.

(أ) المجموع ٢، وحاصل الضرب ٥ (ب) المجموع ٤، وحاصل الضرب ٢

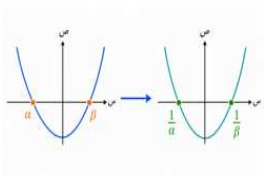
٣ لتكن α ، β حلّي المعادلة التربيعية $س^{٢} + ٢س + ٣ = ٠$. أوجد معادلة تربيعية واحدة لها $\beta + ٣\alpha$ و$\alpha + ٣\beta$ حلّين.

٤ لتكن α ، β حلّي المعادلة التربيعية $س^{٢} - ٢س + ٧ = ٠$. أوجد معادلة تربيعية واحدة لها $\alpha^{٢}$ و$\beta^{٢}$ حلّين.

٥ لتكن α ، β حلّي المعادلة التربيعية $٢س^{٢} + ٣س + ٤ = ٠$. أوجد معادلة تربيعية بمعاملات صحيحة لها $\frac{١}{\alpha}$ و$\frac{١}{\beta}$ حلّين.

★ التحدّي

في الشكل المقابل: إذا كان α وβ جذرَي المعادلة التربيعية، فأنشئ معادلة تربيعية جذراها هما $\frac{١}{\alpha}$ و$\frac{١}{\beta}$.



موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٣-١١
الرياضيات

إشارتا الحلّين

الفصل الثالث الأعداد المركّبة والمعادلات

لاحظ!

في المسائل التي تكون فيها إشارتا حلّي المعادلة التربيعية معلومتين، كوِّن متباينات آنية من الشروط وحُلَّها.

(أ) حلّان موجبان مختلفان: ⇐ د > ٠ ، $\alpha + \beta$ > ٠ ، $\alpha\beta$ > ٠

(ب) حلّان سالبان مختلفان: ⇐ د > ٠ ، $\alpha + \beta$ < ٠ ، $\alpha\beta$ > ٠

(جـ) حلّان مختلفا الإشارة: ⇐ $\alpha\beta$ < ٠

استعد

إذا كانت المعادلة التربيعية $س^{٢} - ٢م س + م + ٦ = ٠$ لها حلّان سالبان مختلفان، أوجد مجموعة قيم العدد الحقيقي م

طريقة الحل

لتكن α ، β حلّي هذه المعادلة التربيعية، وΔ مميّزها.

من د > ٠ ، $(-٢م)^{٢} - ٤ \times ١ \times (م + ٦)$ < ٠

$٤م^{٢} - ٤م - ٢٤$ < ٠

$م^{٢} - م - ٦$ < ٠

$(م - ٣)(م + ٢)$ < ٠

إذن، م < −٢ أو م > ٣ ..... (أ)

من $\alpha + \beta$ > ٠ ، ٢م > ٠

إذن، م > ٠ ..... (ب)

من $\alpha\beta$ > ٠ ، م + ٦ > ٠

إذن، م > −٦ ..... (جـ)

وبإيجاد المدى المشترك بين (أ) و(ب) و(جـ)،

نحصل على −٦ < م < −٢

نواتج التعلّم

يستنتج العلاقات الرياضية بين جذري المعادلة التربيعية ومعاملاتها، ويوظّفها في حلّ المسائل الرياضية أو في دراسة إشارتَي الجذرين (حلّي المعادلة التربيعية).

أخطاء شائعة

من $\alpha + \beta$ > ٠ يُكتب −٢م < ٠
فيُستنتج م > ٠: هذا نسيانٌ لإشارة السالب في الصيغة.

لا حاجة إلى المميّز د هنا.

$\alpha + \beta = -\frac{ب}{أ} = ٢م$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كانت المعادلة التربيعية س^{٢} + ٢م س + م + ٢ = ٠ لها حلّان موجبان مختلفان، أوجد مجموعة قيم العدد الحقيقي م

٢ إذا كان حلّا المعادلة التربيعية س^{٢} – (م – ٣)س – م – ٤ = ٠ مختلفَي الإشارة، أوجد مجموعة قيم العدد الحقيقي م

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كانت المعادلة التربيعية س^{٢} + ٢(م – ١)س + ٢م^{٢} – ٥م – ٣ = ٠ لها حلّان موجبان مختلفان، أوجد مجموعة قيم العدد الحقيقي م

٢ إذا كان حلّا المعادلة التربيعية س^{٢} + ٤كس – ك – ٣ = ٠ مختلفَي الإشارة، أوجد مجموعة قيم العدد الحقيقي ك

٣ إذا كانت المعادلة التربيعية س^{٢} + كس + ٢ك + ٥ = ٠ لها حلّان سالبان مختلفان، أوجد مجموعة قيم العدد الحقيقي ك

★ التحدّي — كفاءة إنتاج البطاريات

في مصنع لإنتاج البطاريات، يتوقّف معامل الكفاءة س على بارامتر تصميمي م. وتُنمذَج العلاقة بين الكفاءة والبارامتر التصميمي بالمعادلة التربيعية:

س^{٢} + (م + ١)س + م + ٤ = ٠

إذا كان للمعادلة حلّان حقيقيان مختلفان، فحلّل مجموعة قيم م في كل حالة: (أ) عندما يكون الحلّان موجبين، وهو ما يمثّل مستويات كفاءة ناجحة للبطارية. (ب) عندما يكون الحلّان سالبين، وهو ما يمثّل إخفاقًا في الأداء. (جـ) عندما يكون أحد الحلَّين موجبًا والآخر سالبًا، وهو ما يمثّل سلوكين متعاكسين للبطارية (نجاح في حالة وإخفاق في أخرى).

تأمّل

كيف يساعدك تحليل خصائص المعادلة – كمعرفة عدد جذورها أو علاقتها بمجموع الجذور وحاصل ضربها – من دون حلّها حلًّا كاملًا، على فهم الرياضيات فهمًا أعمق؟

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

١٢-٣
الرياضيات

نظرية الباقي (١)

الفصل الثالث الأعداد المركّبة والمعادلات

في الاقتصاد والعلوم الاجتماعية، كثيرًا ما يستعمل الباحثون نماذجَ انحدارٍ بكثيرات الحدود لتحليل الاتجاهات والتنبّؤ بها. فقد يدرس الاقتصاديون كيف تتغيّر معدلات البطالة بمرور الزمن، أو كيف يتحوّل توزيع الدخل بين الفئات الاجتماعية المختلفة. وتوفّر كثيرات الحدود طريقةً مرنة لتقريب أنماط البيانات المركّبة والتنبّؤ بالنتائج المستقبلية. **نظرية الباقي**: تتيح تقييم النموذج سريعًا عند سنة معيّنة، كالتنبّؤ بالبطالة في السنة الخامسة بحساب ف(٥). و**نظرية العوامل**: تساعد على تحديد اللحظة التي يبلغ فيها النموذج الصفر، كأن تهبط معدلات الفقر إلى الصفر. و**القسمة التركيبية**: تقدّم طريقةً سريعة لاختبار القيم وتبسيط الحسابات عند تحليل مجموعات بيانات كبيرة.

السؤال الموجّه: كيف تساعد مبرهنات كثيرات الحدود الاقتصاديين وعلماء الاجتماع على اختبار القيم والتنبّؤ بالاتجاهات المستقبلية بكفاءة؟

نواتج التعلّم

يطبّق نظرية الباقي في قسمة كثيرات الحدود بكفاءة.
ويستخدم نظرية الباقي في حلّ مسائل رياضية تتضمّن دوال كثيرات الحدود.

تصوّرات خاطئة

الخلط في المقسوم عليه: قد يعوّض الطالب بالقيمة الخطأ، كأن يستعمل س = ٢ بدل س = $\frac{٢}{٣}$ مع ٣س – ٢.

لاحِظ!

نظرية الباقي

الباقي عند قسمة كثير الحدود ف(س) على التعبير الخطي س – أ هو ف(أ)

الباقي عند قسمة كثير الحدود ف(س) على التعبير الخطي أس – ب هو ف $\left(\frac{ب}{أ}\right)$

مثال: الباقي عند قسمة ف(س) على س – ٤ هو ف(٤)

الباقي عند قسمة ف(س) على ٤س + ٣ هو ف $\left(-\frac{٣}{٤}\right)$

إذا كان
ف(س) ÷ (س – أ) = ق(س)
والباقي ر، فإنّ
ف(س) = ق(س)(س – أ) + ر،
ومن ثَمّ
ف(أ) = ق(أ)(أ – أ) + ر = ر لأنّ
أ – أ = ٠.

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الباقي عند قسمة ٣س^{٤} – ٨س^{٣} – ٥س^{٢} + ١٢ على ٣س – ٢

٢ إذا كان الباقي عند قسمة س^{٣} + أس^{٢} + ٣س + ١ على س + ٣ هو ٤، أوجد قيمة أ.

طريقة الحل

١ لتكن ف(س) = ٣س^{٤} – ٨س^{٣} – ٥س^{٢} + ١٢. الباقي عند القسمة على ٣س – ٢ هو:

عوّض س = $\frac{٢}{٣}$

$$ف\left(\frac{٢}{٣}\right) = ٣\times\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٤} - ٨\times\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣} - ٥\times\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} + ١٢ = ٨$$

٢ لتكن ف(س) = س^{٣} + أس^{٢} + ٣س + ١. الباقي عند القسمة على س + ٣ هو:

عوّض س = –٣

$$ف(-٣) = (-٣)^{٣} + أ\times(-٣)^{٢} + ٣\times(-٣) + ١ = -٣٥ - ٩أ$$

إذن، ٩أ – ٣٥ = ٤

بحلّ هذه المعادلة نجد أ = $\frac{١٣}{٣}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الباقي عند قسمة س^{٣} – ٥س^{٢} + ٤س – ١ على ٢س – ١

٢ إذا كان الباقي عند قسمة س^{٣} + أس^{٢} + ٣س + ١ على س – ٣ هو ١، أوجد قيمة أ.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الباقي عند قسمة س^{٣} + ٢س^{٢} – ٣س – ٤ على س + ٢

٢ أوجد الباقي عند قسمة ٣س^{٣} + ٢س^{٢} – ٥س + ٦ على س – ١

٣ أوجد الباقي عند قسمة ٦س^{٣} – س^{٢} + س – ٢ على ٣س – ٢

٤ أوجد الباقي عند قسمة ٤س^{٣} – ٢س^{٢} – ٤س + ٣ على ٢س + ١

٥ إذا كان الباقي عند قسمة س^{٣} – س^{٢} + أس – ٤ على س + ١ هو –٢، أوجد قيمة أ.

٦ إذا كان الباقي عند قسمة س^{٣} + ٤س^{٢} – ٥س + أ على س + ٣ هو ٨، أوجد قيمة أ.

٧ إذا كان س^{٣} – ٣س^{٢} + ٤س + أ قابلًا للقسمة على س – ٢، أوجد قيمة أ.

★ التحدّي — نموذج توزيع الدخل

يُنمذِج باحثٌ توزيعَ الدخل في مجتمعٍ ما بكثير الحدود:

ف(س) = ٢س^{٣} – ٣س^{٢} + أس + ٦

حيث س عدد السنوات منذ استحداث سياسة اقتصادية جديدة. ولكي يكون النموذج صحيحًا ومستقرًّا، يجب أن يكون قابلًا للقسمة على (٢س + ١)، وهو ما يمثّل قيدَ عدالةٍ في النظام.

١. أوجد قيمة أ التي تضمن قابلية القسمة.

٢. ناقِش رياضيًّا: ما الذي يتغيّر لو كان المقسوم عليه (س + ٢) بدلًا من ذلك؟ وكيف يؤثّر اختيار المقسوم عليه في القيم الممكنة لأ؟ وهل يمكن أن يكون كثير حدود واحد قابلًا للقسمة على أكثر من عامل خطّي في الوقت نفسه؟ وبأي شروط؟

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٣-١٣
الرياضيات

نظرية الباقي (٢)

الفصل الثالث الأعداد المركّبة والمعادلات

لاحظ!

إذا قُسم ف(س) على تعبير تربيعي (س – α)(س – β)،

لتكن المحصلة ق(س) والباقي أس + ب

وعبِّر عنها بالصورة ف(س) = (س – α)(س – β)ق(س) + أس + ب

(س – α)(س – β)ق(س) تصير ٠ عند التعويض بس = α أو س = β.

درجة الباقي يجب أن تكون أقلّ من درجة المقسوم عليه.

نواتج التعلّم

يطبّق نظرية الباقي في قسمة كثيرات الحدود بكفاءة.
ويستخدم نظرية الباقي في حلّ مسائل رياضية تتضمّن دوال كثيرات الحدود.

استعد

إذا قُسم كثير الحدود ف(س) على س – ١ فكان الباقي ٣، وقُسم على س + ٣ فكان الباقي –٥، فأوجد الباقي عند قسمة ف(س) على س^{٢} + ٢س – ٣

طريقة الحل

لتكن المحصلة ق(س) والباقي أس + ب عند قسمة ف(س) على س^{٢} + ٢س – ٣

حلّل المقسوم عليه التربيعي إلى عوامل.

ف(س) = (س^{٢} + ٢س – ٣)ق(س) + أس + ب

ف(س) = (س – ١)(س + ٣)ق(س) + أس + ب

وبما أنّ الباقي عند القسمة على س – ١ هو ٣، فإنّ ف(١) = ٣

الحدّ (١ – ١)(١ + ٣)ق(١) يساوي ٠.

ف(١) = (١ – ١)(١ + ٣)ق(١) + أ + ب = أ + ب

أ + ب = ٣ ..... (١)

وبما أنّ الباقي عند القسمة على س + ٣ هو –٥، فإنّ ف(–٣) = –٥

الحدّ (–٣ – ١)(–٣ + ٣)ق(–٣) يساوي ٠.

ف(–٣) = (–٣ – ١)(–٣ + ٣)ق(–٣) – ٣أ + ب = –٣أ + ب

–٣أ + ب = –٥ ..... (٢)

وبحلّ المعادلتين الآنيتين (١) و(٢) نجد أ = ٢ ، ب = ١

إذن، الباقي المطلوب هو ٢س + ١

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاول

إذا قُسم كثير الحدود ف(س) على س – ٢ فكان الباقي ٣، وقُسم على س + ٣ فكان الباقي –٧، فأوجد الباقي عند قسمة ف(س) على $س^{٢}$ + س – ٦

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا قُسم كثير الحدود ف(س) على س – ١ فكان الباقي ٥، وقُسم على س + ٢ فكان الباقي –١، فأوجد الباقي عند قسمة ف(س) على (س – ١)(س + ٢)

٢ إذا قُسم كثير الحدود ف(س) على س – ٢ فكان الباقي ٤، وقُسم على س + ٣ فكان الباقي –١١، فأوجد الباقي عند قسمة ف(س) على $س^{٢}$ + س – ٦

★ التحدّي

كثير الحدود ف(س) قابل للقسمة على س – ١، ويعطي باقيًا يساوي –٤ عند قسمته على س + ٣. أوجد الباقي عند قسمة ف(س) على $س^{٢}$ + ٢س – ٣

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٣-١٤
الرياضيات

نظرية الباقي (٣)

الفصل الثالث الأعداد المركّبة والمعادلات

نواتج التعلّم

يطبّق نظرية الباقي في قسمة كثيرات الحدود بكفاءة.
ويستخدم نظرية الباقي في حلّ مسائل رياضية تتضمّن دوال كثيرات الحدود.

درجة الباقي يجب أن تكون أقلّ من درجة المقسوم عليه.

لاحِظ!

إذا قُسم ف(س) على تعبير تربيعي (س – α)(س – β)،

لتكن المحصلة ق(س) والباقي أس + ب

وعبِّر عنها بالصورة ف(س) = (س – α)(س – β)ق(س) + أس + ب

(س – α)(س – β)ق(س) تصير ٠ عند التعويض بس = α أو س = β.

استعد

كثير الحدود ف(س) يعطي باقيًا ٧س + ٦ عند قسمته على س^{٢} – س – ٦، و٤س – ٣ عند قسمته على س^{٢} + ٢س – ٣. أوجد الباقي عند قسمة ف(س) على س^{٢} + س – ٢

راجِع الدرس ١-٥: م = ن × خ + ر

طريقة الحل

لتكن المحصلة ق(س) والباقي أس + ب عند قسمة ف(س) على س^{٢} + س – ٢

ف(س) = (س^{٢} + س – ٢)ق(س) + أس + ب

= (س + ٢)(س – ١)ق(س) + أس + ب ..... (١)

لتكن المحصلة ق$_{١}$(س) عند قسمة ف(س) على س^{٢} – س – ٦. وبما أنّ الباقي ٧س + ٦،

ف(س) = (س^{٢} – س – ٦)ق$_{١}$(س) + ٧س + ٦

= (س + ٢)(س – ٣)ق$_{١}$(س) + ٧س + ٦

ومن ثَمّ، ف(–٢) = –١٤ + ٦ = –٨، ومن (١) كذلك ف(–٢) = –٢أ + ب

وبذلك، –٢أ + ب = –٨ ..... (٢)

وعلى المنوال نفسه، لتكن المحصلة ق$_{٢}$(س) عند قسمة ف(س) على س^{٢} + ٢س – ٣. وبما أنّ الباقي ٤س – ٣،

ف(س) = (س^{٢} + ٢س – ٣)ق$_{٢}$(س) + ٤س – ٣

= (س – ١)(س + ٣)ق$_{٢}$(س) + ٤س – ٣

ومن ثَمّ، ف(١) = ٤ – ٣ = ١، ومن (١) كذلك ف(١) = أ + ب. وبذلك، أ + ب = ١ ..... (٣)

وبحلّ المعادلتين الآنيتين (٢) و(٣) نجد أ = ٣ ، ب = –٢

إذن، الباقي المطلوب هو ٣س – ٢

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاول

كثير الحدود ف(س) يعطي باقيًا ٣س + ٢ عند قسمته على س^{٢} – س – ٢، و٧س – ٦ عند قسمته على س^{٢} + ٢س – ٣. أوجد الباقي عند قسمة ف(س) على س^{٢} – ١

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ كثير الحدود ف(س) يعطي باقيًا ٢س – ٢ عند قسمته على س^{٢} – ٢س – ٣، و–س + ٧ عند قسمته على س^{٢} – ٤. أوجد الباقي عند قسمة ف(س) على س^{٢} – س – ٢

٢ كثير الحدود ف(س) يعطي باقيًا –س + ٤ عند قسمته على س^{٢} – ٣س + ٢، و٣س عند قسمته على س^{٢} – ٤س + ٣. أوجد الباقي عند قسمة ف(س) على س^{٢} – ٥س + ٦

٣ كثير الحدود ف(س) يعطي باقيًا س – ٥ عند قسمته على (س + ١)^{٢}، و٦ عند قسمته على س – ٢. أوجد في هذه الحالة الباقي عند قسمة ف(س) على (س + ١)^{٢}(س – ٢)

★ التحدّي

أوجد بالضبط ما سيكون عليه الباقي عند قسمة س^{٥٧} + ٥٧ على س + ١

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٣-١٥
الرياضيات

القسمة التركيبية

الفصل الثالث الأعداد المركّبة والمعادلات

لاحظ!

عند قسمة كثير الحدود على تعبير خطي س – أ، يُسهِّل استخدام **القسمة التركيبية** إيجاد المحصلة والباقي.

استعد

باستخدام القسمة التركيبية، أوجد المحصلة والباقي عند قسمة $س^{٣} + ٥س + ١١$ على $س + ٢$

طريقة الحل

خطوات القسمة التركيبية

١ استخرج معاملات $س^{٣} + ٥س + ١١$

	١	٠	٥	١١

بما أنه لا يوجد حدّ $س^{٢}$، فإنّ معامله يساوي ٠.

٢ بما أنّ القسمة على $س + ٢$، اكتب -٢

-٢ |	١	٠	٥	١١

عند القسمة على س – أ، اكتب قيمة أ على اليسار.

٣ انقل الرقم الأول ١ كما هو، واضربه في -٢ المكتوب على اليسار، واكتب الناتج في الصف الثاني.

٤ اجمع الرقمين عموديًّا.

-٢ |	١	٠	٥	١١
		-٢		
	١	-٢		

٥ كرّر الخطوتين ٣ و ٤ حتى تمتلئ نهاية الصف الثالث من اليمين.

-٢ |	١	٠	٥	١١
		-٢	٤	-١٨
	١	-٢	٩	-٧

من اليمين إلى اليسار: الباقي، ثم الحدّ الثابت للمحصلة، ثم معامل س، ثم معامل $س^{٢}$، ... ، ثم معامل $س^{ن}$.

إذن، المحصلة والباقي المطلوبان هما:

المحصلة $س^{٢} - ٢س + ٩$ ، **الباقي** -٧

نواتج التعلّم

يستخدم القسمة التركيبية في تبسيط كثيرات الحدود وقسمتها.

تصوّرات خاطئة

نسيان إدراج معامل يساوي صفرًا للحدود المفقودة (كحدّ $س^{٢}$). والخلط بين معاملات المحصلة والباقي.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاول

باستخدام القسمة التركيبية، أوجد المحصلة والباقي عند قسمة م على ن لكثيرَي الحدود الآتيين م ون.

(أ) م = س^{٣} + ٥س – ٦ ، ن = س – ١

(ب) م = ٣س^{٣} – ٥س^{٢} – ٣س – ١ ، ن = س – ٣

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

تدريب

باستخدام القسمة التركيبية، أوجد المحصلة والباقي عند قسمة م على ن لكثيرَي الحدود الآتيين م ون.

(أ) م = س^{٣} – ٥س + ٦ ، ن = س – ٢

(ب) م = س^{٣} + ٢س^{٢} – س – ٣ ، ن = س – ١

(جـ) م = ٤س^{٢} – ٢س + ٢ ، ن = س – ١

(د) م = ٣س^{٤} + ٥س^{٣} – ٢س – ١٢ ، ن = س + ٢

★ التحدّي

كثير الحدود ف(س) = ٤س^{٤} – ٤س^{٣} – ١١س^{٢} + ١٢س – ٣ له جزء مقطوع أفقيّ عند س = $\frac{١}{٢}$ بتضاعُف ٢. أوجد الأجزاء المقطوعة الأخرى لف(س).

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

١٦-٣ نظرية العوامل

الفصل الثالث الأعداد المركّبة والمعادلات

الرياضيات

نواتج التعلّم

يطبّق نظرية العوامل في تحليل كثيرات الحدود إلى عواملها.

لاحِظ!

التحليل باستخدام نظرية العوامل

إذا كان كثير الحدود ف(س) قابلًا للقسمة على التعبير الخطي س – أ، يمكن تحليله بالصورة ف(س) = (س – أ)ق(س).

ق(س) هي المحصلة عند قسمة ف(س) على س – أ.

في التحليل باستخدام نظرية العوامل، أوجد قيمة أ بحيث يكون ف(أ) = ٠

يسهل إيجاد قيم أ بتعويض **±(مقسومات الحدّ الثابت)** بالترتيب.

مثال: مقسومات الحدّ الثابت ٦ في $س^{٣} + ٣س^{٢} + ٢س + ٦$ هي ١، ٢، ٣، ٦ ⇐ عوّض ±١، ±٢، ±٣، ±٦ بالترتيب.

استعد

حلّل التعبيرات الآتية إلى عوامل.

(أ) $س^{٣} + ٢س^{٢} – س – ٢$

(ب) $س^{٤} – ٦س^{٣} + ٨س^{٢} + ٨س – ١٦$

طريقة الحل

(أ) لتكن ف(س) = $س^{٣} + ٢س^{٢} – س – ٢$

بما أنّ الحدّ الثابت هو –٢، عوّض ±١، ±٢ بالترتيب.

ف(١) = $١^{٣} + ٢ \times ١^{٢} – ١ – ٢ = ٠$

يمكن تحليلها على الصورة ف(س) = (س – ١)(...).

بقسمة ف(س) على س – ١،

استخدم القسمة التركيبية.

ف(س) = (س – ١)($س^{٢} + ٣س + ٢$)

حلّل الجزء التربيعي إلى عوامله.

= (س – ١)(س + ١)(س + ٢)

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

(ب) لتكن ف(س) = س^{٤} – ٦س^{٣} + ٨س^{٢} + ٨س – ١٦

عوّض ±١، ±٢، ±٤ ... بالترتيب.

ف(٢) = ٢^{٤} – ٦ × ٢^{٣} + ٨ × ٢^{٢} + ٨ × ٢ – ١٦ = ٠

بقسمة ف(س) على س – ٢،

حلّل الجزء التكعيبي إلى عوامله باستخدام نظرية العوامل.

ف(س) = (س – ٢)(س^{٣} – ٤س^{٢} + ٨)

لتكن ق(س) = س^{٣} – ٤س^{٢} + ٨

عوّض ±١، ±٢، ±٤ ... بالترتيب.

ق(٢) = ٢^{٣} – ٤ × ٢^{٢} + ٨ = ٠

بقسمة ق(س) على س – ٢،

ق(س) = (س – ٢)(س^{٢} – ٢س – ٤)

إذن، ف(س) = (س – ٢)(س – ٢)(س^{٢} – ٢س – ٤)

الجزء التربيعي لا يمكن تحليله أكثر من ذلك، لذا اترك الإجابة كما هي.

= (س – ٢)^{٢}(س^{٢} – ٢س – ٤)

حاول

حلّل التعبيرات الآتية إلى عوامل.

(أ) س^{٣} – ٢س^{٢} – ٥س + ٦

(ب) س^{٣} – س^{٢} – ١٦س – ٢٠

(جـ) ٢س^{٣} – س^{٢} – ٥س – ٢

(د) ٢س^{٣} – ٣س^{٢} – س – ٢

(هـ) س^{٤} + ٣س^{٣} – ٢٧س^{٢} + ١٣س + ٤٢

(و) س^{٤} – ٤س^{٣} + ٨س^{٢} – ٨س + ٣

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدريب

حلّل التعبيرات الآتية إلى عوامل.

(أ) $س^{٣} - ٧س - ٦$

(ب) $س^{٣} + ٤س^{٢} + س - ٦$

(ج) $س^{٣} + ٦س^{٢} + ١١س + ٦$

(د) $س^{٣} - ٣س + ٢$

(هـ) $س^{٣} + س^{٢} - ٨س - ١٢$

(و) $س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س - ٥$

(ز) $٢س^{٣} - ٣س^{٢} - ٣س + ٢$

(ح) $٣س^{٣} + س^{٢} - ٨س + ٤$

(ط) $٢س^{٣} + ٧س^{٢} + ٨س + ٣$

(ي) $٢س^{٣} - ٧س^{٢} + ٣س + ٦$

(ك) $س^{٣} + ٤س^{٢} + ٢س - ٤$

(ل) $س^{٣} - ٣س^{٢} + ٢$

(م) $س^{٤} - ١٠س^{٣} + ٣٥س^{٢} - ٥٠س + ٢٤$

(ن) $س^{٤} - ٥س^{٣} - ٣س^{٢} + ١٧س - ١٠$

(س) $٢س^{٤} - ٥س^{٣} - ٢٠س^{٢} + ٢٠س + ٤٨$

(ع) $س^{٤} - ٤س^{٣} - ٤س^{٢} + ١٣س - ٦$

(ف) $س^{٤} - ٤س^{٣} + ٣س^{٢} + ٢س - ٦$

(ص) $س^{٤} - س^{٣} + س^{٢} + س - ٢$

★ التحدّي

لتكن ف(س) كثير الحدود المعرَّف بـ ف(س) = $س^{٤} - ٣س^{٣} + أس^{٢} + بس + ١٢$. وبما أنّ كلًّا من (س – ١) و(س + ٢) عاملٌ لـ ف(س):

١. أوجد القيمتين الدقيقتين للثابتين أ وب.

٢. ثم عيِّن جميع جذور المعادلة ف(س) = ٠

تأمّل

كيف يساعدنا تفكيك كثيرات الحدود إلى عوامل على فهم الرياضيات والأنظمة الواقعية فهمًا أعمق؟

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٣-١٧
الرياضيات

المعادلات ذات الدرجة العالية

الفصل الثالث الأعداد المركّبة والمعادلات

نواتج التعلّم

يحلّ المعادلات ذات الدرجة العالية.

المفهوم ٣ · ١ المعادلات ذات الدرجة العالية

في الهندسة الطبية الحيوية، تتطلّب نمذجةُ البنى الفيزيائية تجاوزَ المستقيمات المسطّحة والقطوع المكافئة البسيطة. فعندما يصمّم الباحثون صمّامات قلبٍ صناعية، أو يُنمذِجون سرعة سريان الدم في شريان متضيّق، تتغيّر ديناميكا المائع تغيّرًا مركّبًا غير خطّي. وتُنمذَج هذه الظواهر بمعادلات كثيرات الحدود التكعيبية وذوات الدرجات الأعلى.

وخلافًا للمعادلات التربيعية التي تُنمذِج قمّةً واحدة أو قاعًا واحدًا فحسب، تستطيع المعادلة التكعيبية أن تُمسك بنظامٍ يبدأ من خطّ أساس، ثم يشهد اندفاعًا مفاجئًا (كنبضة القلب)، ثم يستقرّ راجعًا إلى الاتزان.

السؤال الموجّه: كيف تُتيح لنا الخصائص الجبرية للمعادلات التكعيبية — كتعدّد نقاط الانعطاف، والجذور المتكرّرة، والجذور التكعيبية للواحد — أن نُنمذِج الأنظمة بدقّةٍ أكبر مما تُتيحه المعادلات التربيعية؟

لاحِظ!

- معادلة من الدرجة ن لها دائمًا ن **حلًّا** عند النظر فيها ضمن نطاق الأعداد المركّبة (باستثناء حالات الحلول المتكرّرة).
- كيفية حلّ المعادلات التكعيبية والمعادلات من الدرجة الرابعة

١ حلّل إلى عوامل

• للمعادلات التكعيبية: إذا أمكن تحويلها إلى س^{٣} + أ^{٣} = ٠ ⇐ استخدم
س^{٣} + أ^{٣} = (س + أ)(س^{٢} − أس + أ^{٢})

: وإلّا ⇐ استخدم **نظرية العوامل**.

• للمعادلات من الدرجة الرابعة: إذا كانت تحتوي على حدود س^{٤} وس^{٢} والحدود الثابتة فقط ⇐ عامِل س^{٢} **كوحدة واحدة**.

: وإلّا ⇐ استخدم **نظرية العوامل**.

٢ أوجد الحلول

• حلول (س − α)(س − β)(س − γ) = ٠ هي س = α ، β ، γ

• وبالنسبة لـ(س − أ)(أس^{٢} + بس + ج) = ٠، إذا تعذّر تحليل أس^{٢} + بس + ج إلى عوامل ⇐ استخدم قانون الدرجة الثانية.

الحلول في هذه الحالة هي س = أ ، $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أج}}{٢أ}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

استعد

حلّ المعادلات الآتية.

(أ) س^{٣} – ٨ = ٠

(ب) س^{٣} – ٢س^{٢} – ٥س + ٦ = ٠

(جـ) س^{٤} – ٧س^{٢} – ١٨ = ٠

(د) س^{٤} – ٦س^{٣} + ٨س^{٢} – ٨س – ١٦ = ٠

طريقة الحل

(أ) س^{٣} – ٨ = ٠

استخدم س^{٣} + أ^{٣} = (س + أ)(س^{٢} – أس + أ^{٢})

(س – ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤) = ٠

بما أنّ س^{٢} + ٢س + ٤ لا يمكن تحليله إلى عوامل، أوجد الحلول باستخدام قانون الحلّ العام.

إذن، الحلول المطلوبة هي س = ١ ± $\sqrt{-٣}$ ت

(ب) س^{٣} – ٢س^{٢} – ٥س + ٦ = ٠

بما أنّ القوانين لا يمكن تطبيقها، استخدم نظرية العوامل.

(س – ١)(س^{٢} – س – ٦) = ٠

حلّل الجزء التربيعي إلى عوامله.

(س – ١)(س – ٣)(س + ٢) = ٠

إذن، الحلول المطلوبة هي س = ١، ٣، –٢

(جـ) س^{٤} – ٧س^{٢} – ١٨ = ٠

بما أنها معادلة من الدرجة الرابعة تحتوي على س^{٤} وس^{٢} والحدود الثابتة، حلّلها بمعاملة س^{٢} كوحدة واحدة.

(س^{٢})^{٢} – ٧س^{٢} – ١٨ = ٠

(س^{٢} – ٩)(س^{٢} + ٢) = ٠

حلّ كل معادلة تربيعية.

س^{٢} = ٩، أو س^{٢} = –٢

إذن، الحلول المطلوبة هي س = ±٣، ± $\sqrt{٢}$ ت

(د) س^{٤} – ٦س^{٣} + ٨س^{٢} + ٨س – ١٦ = ٠

استخدم نظرية العوامل.

(س – ٢)(س^{٣} – ٤س^{٢} + ٨) = ٠

حلّل الجزء التكعيبي إلى عوامله.

(س – ٢)^{٢}(س^{٢} – ٢س – ٤) = ٠

إذن، الحلول المطلوبة هي س = ١ ± $\sqrt{٥}$، ٢

حاول

حلّ المعادلات الآتية.

(أ) س^{٣} = –١

(ب) ٣س^{٣} + س^{٢} – ٨س + ٤ = ٠

(جـ) ٢س^{٣} – ٣س^{٢} – س – ٢ = ٠

(د) س^{٣} – س^{٢} – ١٦س – ٢٠ = ٠

(هـ) س^{٤} – ٥س^{٢} + ٤ = ٠

(و) س^{٤} – ١٠س^{٣} + ٣٥س^{٢} – ٥٠س + ٢٤ = ٠

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدريب

حلّ المعادلات الآتية.

(أ) $س^{٣} = ٢٧$

(ب) $س^{٣} = -١٢٥$

(ج) $٨س^{٣} = ١$

(د) $س^{٣} + ٦س^{٢} + ١١س + ٦ = ٠$

(هـ) $س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤س - ١٢ = ٠$

(و) $٣س^{٣} - ٢س^{٢} - ٣س + ٢ = ٠$

(ز) $س^{٣} - س^{٢} - ٤ = ٠$

(ح) $س^{٣} + ٤س^{٢} + ٢س - ٤ = ٠$

(ط) $س^{٣} - ٤س^{٢} + ٩س - ١٠ = ٠$

(ي) $س^{٣} + س^{٢} - ٨س - ١٢ = ٠$

(ك) $٢س^{٣} + ٧س^{٢} + ٨س + ٣ = ٠$

(ل) $س^{٣} + ٦س^{٢} + ١٢س + ٨ = ٠$

(م) $س^{٤} - ٥س^{٢} - ٣٦ = ٠$

(ن) $س^{٤} - ٦س^{٢} - ٢٧ = ٠$

(س) $س^{٤} - س^{٢} - ٢ = ٠$

(ع)
$س^{٤} - ٩س^{٣} + ٢٩س^{٢} - ٣٩س + ١٨ = ٠$

(ف) $س^{٤} - ٤س^{٣} + ٣س^{٢} + ٢س - ٦ = ٠$

★ التحدّي — اتزان خزّان مياه

لديك خزّان مياه منزليّ. يدخل الماء إلى الخزّان بمعدّلات مختلفة ويخرج منه بمعدّلات أخرى، وكلّها تتوقّف على مستوى الضغط س: الداخل (زيادة الماء) $س^{٤} + س^{٢} + س$ ، والخارج (نقص الماء) $س^{٣} + ٢$. ولكي يبقى مستوى الماء في الخزّان ثابتًا تمامًا:

١. اكتب المعادلة التي تُعبّر عن التوازن بين الداخل والخارج.

٢. حُلّ المعادلة لإيجاد قيم س التي تُبقي مستوى الماء ثابتًا.

٣. حدّد ما إذا كانت الحلول أعدادًا حقيقية فحسب، أم أن هناك حلولًا مركّبة أيضًا.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٣-١٨ تعيين المعادلة التكعيبية

الرياضيات

الفصل الثالث الأعداد المركّبة والمعادلات

نواتج التعلّم

يحلّ المعادلات ذات الدرجة العالية، ويكوّن معادلات تكعيبية بناءً على معطيات مُعطاة.

لاحِظ!

عند إعطاء حلٍّ لمعادلة تكعيبية، احسب **بالتعويض بالحلّ في المعادلة المعطاة**.

استعد

إذا كان للمعادلة التكعيبية س^{٣} + أس^{٢} + بس + ٥ = ٠ الحلُّ ٢ + ت، فأوجد قيمتَي العددين الحقيقيين أ وب، وأوجد كذلك الحلَّين الآخرين.

طريقة الحل

بما أنّ س = ٢ + ت حلٌّ، — عوّض بالحلّ.

(٢ + ت)^{٣} + أ(٢ + ت)^{٢} + ب(٢ + ت) + ٥ = ٠

(٣أ + ٢ب + ٧) + (٤أ + ب + ١١)ت = ٠ — حوّلها إلى الصورة أ + بت.

إذن،

٣أ + ٢ب + ٧ = ٠

٤أ + ب + ١١ = ٠

وبحلّ هذا نجد أ = −٣ ، ب = ١ — قارِن الجزأين الحقيقي والتخيلي في الطرفين (انظر ٣-١).

وفي هذه الحالة تصير المعادلة الأصلية س^{٣} − ٣س^{٢} + س + ٥ = ٠

وبتحليل الطرف الأيمن نحصل على (س + ١)(س^{٢} − ٤س + ٥) = ٠ — بما أنّ القوانين لا يمكن تطبيقها، استخدم نظرية العوامل.

إذن، س = −١ أو ٢ ± ت

تلخيص ما سبق:

أ = −٣ ، ب = ١، **والحلّان الآخران هما** س = −١ **أو** ٢ − ت — لا تُدرِج ٢ + ت في الإجابة.

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان للمعادلة التكعيبية س^{٣} + ٤س^{٢} + أس + ب = ٠ الحلّان −٣ و١، فأوجد قيمتَي العددين الحقيقيين أ وب، وأوجد كذلك الحلّ الآخر.

٢ إذا كان للمعادلة التكعيبية س^{٣} + أس^{٢} + بس − ٤ = ٠ الحلُّ ١ + ت، فأوجد قيمتَي العددين الحقيقيين أ وب، وأوجد كذلك الحلَّين الآخرين.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان للمعادلة التكعيبية س^{٣} – أس^{٢} – س + ب = ٠ الحلّان –١ و٢، فأوجد قيمتَي العددين الحقيقيين أ وب، وأوجد كذلك الحلّ الآخر.

٢ إذا كان للمعادلة التكعيبية س^{٣} + أس^{٢} + بس – ٨ = ٠ الحلّان ١ و٢، فأوجد قيمتَي العددين الحقيقيين أ وب، وأوجد كذلك الحلّ الآخر.

٣ إذا كان أحد حلول المعادلة التكعيبية س^{٣} – كس^{٢} + (٣ك – ١)س – ٢٤ = ٠ هو ٢، فأوجد قيمة العدد الحقيقي ك، وأوجد كذلك الحلَّين الآخرين.

٤ إذا كان للمعادلة التكعيبية س^{٣} + أس^{٢} + بس – ٢٠ = ٠ الحلُّ ١ – ٣ت، فأوجد قيمتَي العددين الحقيقيين أ وب، وأوجد كذلك الحلَّين الآخرين.

٥ إذا كان للمعادلة التكعيبية س^{٣} + أس^{٢} + بس + ١٠ = ٠ الحلُّ ١ + ٢ت، فأوجد قيمتَي العددين الحقيقيين أ وب، وأوجد كذلك الحلَّين الآخرين.

★ التحدّي

إذا كان للمعادلة التكعيبية س^{٣} + أس + ب = ٠ الحلُّ ١ + $\sqrt{٢}$ ت، فأوجد قيمتَي العددين الحقيقيين أ وب، وأوجد كذلك الحلَّين الآخرين.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٣-١٩ الجذور التكعيبية للواحد

الرياضيات

الفصل الثالث الأعداد المركّبة والمعادلات

لاحِظ!

العدد الذي يساوي ١ عند تكعيبه يُسمّى **جذرًا تكعيبيًّا للواحد**. وأحد هذه الجذور الذي هو عددٌ تخيلي يُرمَز إليه بـ ω (أوميجا).

ω يمتلك الخصائص الآتية:

$\omega^{٣} = ١$

$\omega^{٢} + \omega + ١ = ٠$

في الحسابات التي تُستخدم فيها ω، استخدم أوّلًا $\omega^{٣} = ١$ لتخفيض درجة ω.

بعد ذلك، إذا بقي $\omega^{٢}$ وω، استخدم $\omega^{٢} + \omega + ١ = ٠$ لإيجاد قيمة التعبير.

نواتج التعلّم

يوجد الجذور التكعيبية للواحد، ويطبّق خواصّها في تبسيط المقادير الجبرية.

★ التحدّي

أوجد قيمة التعبير الآتي دون فكّ الأقواس مباشرةً:

$(\omega^{٢} + \omega - ١)(\omega^{٢} - \omega + ١)$

بما أنّ $\omega^{٣} = ١$ ، $\omega^{٣} - ١ = ٠ \Leftarrow$
$(\omega - ١)(\omega^{٢} + \omega + ١) = ٠$

وبما أنّ $\omega \neq ١$ ، $\omega^{٢} + \omega + ١ = ٠$

استعد

لتكن ω أحد الجذور التكعيبية التخيلية للواحد، أوجد قيمة التعبيرات الآتية.

(أ) $\omega^{٩}$ (ب) $\omega^{٤} + \omega^{٥}$ (ج) $\omega + \frac{١}{\omega}$

طريقة الحل

أنشِئ $\omega^{٣}$ لاستخدام $\omega^{٣} = ١$

بما أنّ $\omega^{٢} + \omega + ١ = ٠$ ،
$\omega + \omega^{٢} = -١$

بما أنّ $\omega^{٢} + \omega + ١ = ٠$ ،
$\omega^{٢} + ١ = -\omega$

(أ) $\omega^{٩} = (\omega^{٣})^{٣} = ١^{٣} = ١$

(ب) $\omega^{٤} + \omega^{٥} = \omega \times \omega^{٣} + \omega^{٢} \times \omega^{٣} = \omega + \omega^{٢} = -١$

(ج) $\omega + \frac{١}{\omega} = \frac{\omega^{٢} + ١}{\omega} = \frac{-\omega}{\omega} = -١$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

حاول

لتكن ω أحد الجذور التكعيبية التخيلية للواحد، أوجد قيمة التعبيرات الآتية.

(أ) $\omega^{٢٠١٠}$ (ب) $\omega + \omega^{٢}$ (ج) $(\omega + ١)(\omega^{٢} + ١)$

تدريب

١ لتكن ω أحد الجذور التكعيبية التخيلية للواحد، أوجد قيمة التعبيرات الآتية.

(أ) $\omega^{٣}$ (ب) $\omega^{٢} + \omega^{٤} + \omega^{٦}$ (ج) $١ + \frac{١}{\omega} + \frac{١}{\omega^{٢}}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٣-٢٠
الرياضيات

المعادلة التكعيبية ذات الجذور المتكرّرة

الفصل الثالث الأعداد المركّبة والمعادلات

نواتج التعلّم

يحلّ المعادلات التكعيبية ذات الجذور المكرّرة.

لاحظ!

- تُحَلّ مسألةُ تحديد معادلةٍ بحيث تملك معادلةٌ تكعيبية جذرًا مكرّرًا باستخدام **نظرية العوامل** أوّلًا لتحليل التعبير التكعيبي المعطى إلى الصورة (س – أ)(س^{٢} + بس + ج).
- هناك حالتان تملك فيهما (س – أ)(س^{٢} + بس + ج) = ٠ جذرًا مكرّرًا.
  - إذا كان س^{٢} + ب س+ ج = ٠ تملك س = أ حلًّا: ⇐ **عوّض** س = أ **في** س^{٢} + بس + ج = ٠
  - إذا كان س^{٢} + ب س+ ج = ٠ يملك جذرًا مكرّرًا: ⇐ **أوجد الشرط الذي يجعل المميّز Δ لـ** س^{٢} + ب س+ ج = ٠ **يساوي** ٠

استعد

أوجد قيمة الثابت أ بحيث **يكون للمعادلة** س^{٣} – ٢س^{٢} + (أ – ٣)س + أ = ٠ جذرًا مكرّرًا.

طريقة الحل

حلّل س^{٣} – ٢س^{٢} + (أ – ٣)س + أ إلى عوامل باستخدام نظرية العوامل.

لتكن ف(س) = س^{٣} – ٢س^{٢} + (أ – ٣)س + أ ..... (١)

ف(–١) = ٠

إذن، ف(س) = (س + ١)(س^{٢} – ٣س + أ)

(س + ١)(س^{٢} – ٣س + أ) = ٠ لها جذرًا مكرّرًا عندما:

س^{٢} – ٣س + أ = ٠ تملك س = –١ حلًّا، أو س^{٢} – ٣س + أ = ٠ لها جذرًا مكرّرًا.

إذا كان س^{٢} – ٣س + أ = ٠ فلها س = –١ كحلّ.

[١] عوّض س = –١ في س^{٢} – ٣س + أ = ٠

(–١)^{٢} – ٣ × (–١) + أ = ٠

وبحلّ هذا نجد أ = –٤

وفي هذه الحالة تصير (١) (س + ١)^{٢}(س – ٤) = ٠، وهذا يحقّق الشرط.

[٢] عندما تملك س^{٢} – ٣س + أ = ٠ جذرًا مكرّرًا، لتكن Δ مميّز هذا التعبير:

Δ = (–٣)^{٢} – ٤ × ١ × أ = ٠

وبحلّ هذا نجد أ = $\frac{٩}{٤}$

وفي هذه الحالة تصير (١) (س + ١) $\left(س - \frac{٣}{٢}\right)^{٢}$ = ٠، وهذا يحقّق الشرط.

إذن، قيم أ المطلوبة هي أ = –٤ ، $\frac{٩}{٤}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاول

أوجد قيمة الثابت أ بحيث يكون لس^{٣} – س^{٢} + (أ – ٢)س + أ = ٠ جذرٌ مكرّر.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد قيمة الثابت أ بحيث يكون لس^{٣} – ٧س^{٢} + (أ + ٦)س – أ = ٠ جذرٌ مكرّر.

٢ أوجد قيمة الثابت أ بحيث يكون لس^{٣} – (أ + ١)س^{٢} + (٣أ + ٥)س – ٢أ – ٥ = ٠ جذرٌ مكرّر.

٣ أوجد قيمة الثابت أ بحيث يكون لس^{٣} + (٢أ – ١)س^{٢} – ٣(أ – ٢)س + أ – ٦ = ٠ جذرٌ مكرّر.

★ التحدّي

أوجد قيمة الثابت أ بحيث يكون لس^{٣} + (أ – ١)س^{٢} + (أ – ٣)س – ٢أ + ٣ = ٠ جذرٌ مكرّر.

تأمّل

قد لا يكون للمعادلة التربيعية (مثل س^{٢} + ١ = ٠) حلولٌ حقيقية. فلماذا يكون للمعادلة التكعيبية (مثل س^{٣} + س + ١ = ٠) حلٌّ حقيقي واحد على الأقلّ دائمًا؟ وما الذي يكشفه هذا عن سلوك هذين النوعين من المعادلات؟

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

١-٤ التقسيم الداخلي والخارجي على خط الأعداد

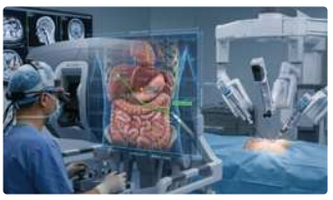
الرياضيات

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

نواتج التعلّم

إيجاد إحداثى نقطة القسمة (الداخلية والخارجية) لقطعة مستقيمة على خط الأعداد.

المفهوم ١ · أساسيات الهندسة الإحداثية



عندما يخطّط الجرّاح لعملية جراحية روبوتية محدودة التوغّل، تصير الدقّة مسألة حياة أو موت. فذراع الروبوت تشقّ طريقها فى فراغ ثلاثى الأبعاد داخل جسم الإنسان لتصل إلى ورم بعينه، وعليها ألّا تتلف الأنسجة السليمة المحيطة أو الأوعية الدموية أو النهايات العصبية الحسّاسة.

ولتحقيق ذلك، ترسم برمجيات التصوير الطبى تشريح المريض على شبكة إحداثية دقيقة. ويُسنَد إلى كل معلم تشريحى وموضع شقٍّ وطرف أداة جراحية عنوانٌ عددىٌّ مضبوط من الإحداثيات. وبتتبّع هذه المواضع الرياضية، يحدّد النظام الجراحى المسارات المثلى والمسافات ونقاط منتصف الحدود اللازمة لتنفيذ الإجراء بأمان.

السؤال الموجّه: كيف يتيح لنا تمثيل الفراغ المادى على شبكة من الأعداد أن نقسّم المسارات بدقّة، ونجد مواضع الاتزان، ونتحرّك بأمان فى بيئات مادية معقّدة؟

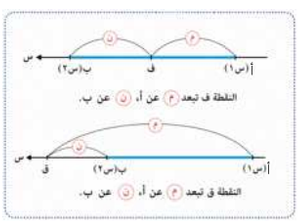
لاحظ!

- على خط الأعداد، يقابل عدد حقيقى واحد $س_١$ النقطةَ ف. فى هذه الحالة، يُسمّى $س_١$ إحداثى النقطة ف، وتُرمَز النقطة ف ذات الإحداثى $س_١$ بالرمز ف($س_١$).
- المسافة أب بين نقطتين أ($س_١$) وب($س_٢$) على خط الأعداد تُعطى بالعلاقة

$$أب = |س_٢ - س_١|$$

بما أنّ المسافة لا تكون سالبة، نستخدم القيمة المطلقة.

- إذا كانت النقطة ف على القطعة المستقيمة أب بحيث أف : فب = م : ن، يُقال إنّ النقطة ف تقسم القطعة المستقيمة أب **داخليًّا** بالنسبة م : ن.



- إذا كانت النقطة ق على امتداد القطعة المستقيمة أب بحيث أق : قب = م : ن، يُقال إنّ النقطة ق تقسم القطعة المستقيمة أب **خارجيًّا** بالنسبة م : ن.
- بالنسبة للقطعة المستقيمة أب التى تصل بين نقطتين أ($س_١$) وب($س_٢$) على خط الأعداد:

(١) إحداثى النقطة ف التى تقسم القطعة أب داخليًّا بالنسبة م : ن هو

$$ف\left(\frac{ن س_١ + م س_٢}{م + ن}\right)$$

(٢) إحداثى النقطة ق التى تقسم القطعة أب خارجيًّا بالنسبة م : ن هو

$$ق\left(\frac{-ن س_١ + م س_٢}{م - ن}\right)$$

انتبه إلى ترتيب الضرب (الضرب التبادلى).

(٣) إحداثى نقطة المنتصف م هو (إذ تقسم القطعة أب داخليًّا بنسبة ١ : ١):

$$م\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}\right)$$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

استعِدّ

لنقطتين أ(−٤) وب(٨)، أوجد المسافات أو الإحداثيات الآتية.

(أ) المسافة أب بين النقطتين.

(ب) إحداثى النقطة جـ التى تقسم القطعة أب داخليًّا بالنسبة ٢ : ١

(جـ) إحداثى النقطة د التى تقسم القطعة أب خارجيًّا بالنسبة ٢ : ٣

(د) إحداثى نقطة المنتصف م من القطعة أب.

طريقة الحلّ

(أ) أب = |٨ − (−٤)|

= ١٢

(ب)

$$٤ = \frac{٨ \times ٢ + (-٤) \times ١}{١ + ٢}$$

إذن، جـ(٤)

(جـ)

$$-٢٨ = \frac{٨ \times ٢ + (-٤) \times -٣}{٣ - ٢}$$

إذن، د(−٢٨)

(د)

$$٢ = \frac{٨ + -٤}{٢}$$

إذن، م(٢)

حاوِل

لنقطتين أ(−٥) وب(٧)، أوجد المسافات أو الإحداثيات الآتية.

(أ) المسافة أب بين النقطتين.

(ب) إحداثى النقطة جـ التى تقسم القطعة أب داخليًّا بالنسبة ٢ : ١

(جـ) إحداثى النقطة د التى تقسم القطعة أب خارجيًّا بالنسبة ٢ : ٥

(د) إحداثى نقطة المنتصف م من القطعة أب.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ الفرعين (جـ) و(د) ثم ناقِشوا الإجابة.

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ لنقطتين أ(−٢) وب(٦)، أوجد المسافات أو الإحداثيات الآتية.

(أ) المسافة أب بين النقطتين.

(ب) إحداثى النقطة جـ التى تقسم القطعة أب داخليًّا بالنسبة ٣ : ١

(جـ) إحداثى النقطة د التى تقسم القطعة أب خارجيًّا بالنسبة ٥ : ٣

(د) إحداثى نقطة المنتصف م من القطعة أب.

٢ لنقطتين أ(٤) وب(١٠)، أوجد المسافات أو الإحداثيات الآتية.

(أ) المسافة أب بين النقطتين.

(ب) إحداثى النقطة جـ التى تقسم القطعة أب داخليًّا بالنسبة ٢ : ١

(جـ) إحداثى النقطة د التى تقسم القطعة أب خارجيًّا بالنسبة ١ : ٣

(د) إحداثى نقطة المنتصف م من القطعة أب.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

★ التحدّى

البنية التحتية لمختبر أبحاث تحت السطح

يشغّل فريق من علماء الأحياء البحرية موئل أبحاث غاطسًا مثبّتًا على جدار خندق بحرى رأسى مستقيم. ولتتبّع المواضع على هذا الجدار السحيق، يستعملون محورًا مرجعيًّا أحادى البعد مدرَّجًا بالكيلومترات منسوبًا إلى مستوى سطح البحر (٠ كم).

وتوجد الآن كبسولتا رصد رئيسيتان مثبّتتان على جدار الخندق مباشرةً:

الكبسولة أ على عمق −٨ كم.

الكبسولة ب أقرب إلى السطح على عمق −٣ كم.

مستعينًا بمعرفتك بقسمة القطعة المستقيمة، احسب المواضع والمسافات اللازمة لتوسيع شبكة أبحاثهم:

(أ) طول كبل الألياف الضوئية الواصل.

(ب) مصفوفة مجسّات البيئة الداخلية − النقطة جـ تقسم أب داخليًّا بنسبة ١ : ٤

(جـ) المحطة الخارجية فى عمق الخندق − النقطة د تقسم أب خارجيًّا بنسبة ٣ : ٤

(د) موقع مركز الإمداد الطارئ (م) − نقطة المنتصف م من أب

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٤-٢ النقاط فى المستوى الإحداثى

الرياضيات

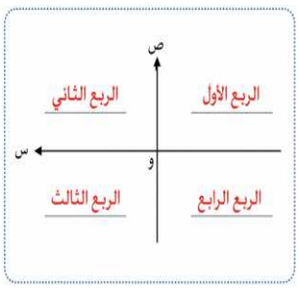
الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

نواتج التعلّم

تحديد الربع الذى تقع فيه نقطة فى المستوى الإحداثى.

لاحظ!

يُقسَّم المستوى الإحداثى إلى ٤ أرباع كما هو موضّح فى الشكل على اليمين، باستثناء المحورين الإحداثيين.



استعِدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ حدّد الربع الذى تقع فيه النقاط الآتية.

(أ) النقطة ز(٢، ٣) **(ب)** النقطة ح(٢، −٣) **(ج)** النقطة ث(−٢، ٣)

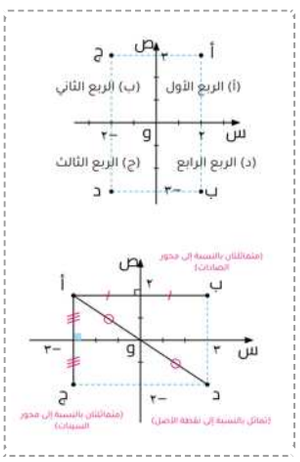
(د) النقطة ي(−٢، −٣)

٢ للنقطة أ(−٣، ٢)، أوجد إحداثيات النقاط الآتية.

(أ) النقطة ف المتماثلة بالنسبة للمحور س

(ب) النقطة ق المتماثلة بالنسبة للمحور ص

(ج) النقطة ر المتماثلة بالنسبة لنقطة الأصل



طريقة الحلّ

١ ارسم النقاط على المستوى الإحداثى للتوضيح.

(أ) الربع الأول **(ب)** الربع الرابع

(ج) الربع الثانى **(د)** الربع الثالث

٢ غيّر إشارة الإحداثى الآخر.

(أ) النقطة ف المتماثلة بالنسبة للمحور س

ف(−٣، −٢)

(ب) النقطة ق المتماثلة بالنسبة للمحور ص

ق(٣، ٢)

(ج) النقطة ر المتماثلة بالنسبة لنقطة الأصل

ر(٣، −٢)

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاوِل

حلّ المسائل الآتية.

١ حدّد الربع الذى تقع فيه النقاط الآتية.

(أ) النقطة أ(–٢، ٤)

(ب) النقطة ب(١، ٢)

(ج) النقطة جـ(٣، –٢)

(د) النقطة د(–٣، –١)

٢ للنقطة أ(–١، ٢)، أوجد إحداثيات النقاط الآتية.

(أ) النقطة ف المتماثلة بالنسبة للمحور س

(ب) النقطة ق المتماثلة بالنسبة للمحور ص

(ج) النقطة ر المتماثلة بالنسبة لنقطة الأصل

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ حدّد الربع الذى تقع فيه النقاط الآتية.

(أ) النقطة أ (–١، ٣)

(ب) النقطة ب (٢، –٨)

(ج) النقطة جـ (٤، ٤)

(د) النقطة د (–٦، –٤)

(هـ) النقطة هـ (–٢، ٦)

(و) النقطة و (٣، –٣)

(ز) النقطة ز (–٥، –٧)

(ح) النقطة ح (١، ٤)

٢ للنقطة أ(–٤، –٢)، أوجد إحداثيات النقاط الآتية.

(أ) ف المتماثلة بالنسبة للمحور س

(ب) ق المتماثلة بالنسبة للمحور ص

(ج) ر المتماثلة بالنسبة لنقطة الأصل

٣ للنقطة أ(١، –٢)، أوجد إحداثيات النقاط الآتية.

(أ) ف المتماثلة بالنسبة للمحور س

(ب) ق المتماثلة بالنسبة للمحور ص

(ج) ر المتماثلة بالنسبة لنقطة الأصل

٤ للنقطة أ(–٣، ٤)، أوجد إحداثيات النقاط الآتية.

(أ) ف المتماثلة بالنسبة للمحور س

(ب) ق المتماثلة بالنسبة للمحور ص

(ج) ر المتماثلة بالنسبة لنقطة الأصل

★ التحدّى

ذراع لحام آلية مبرمَجة عند النقطة أ(–٣، ٤) على لوح معدنى. ولِلحام دعامات إسناد متطابقة، على الذراع أن تعكس هذه النقطة:

(أ) النقطة ف المتماثلة بالنسبة للمحور س

(ب) النقطة ق المتماثلة بالنسبة للمحور ص

(ج) النقطة ر المتماثلة بالنسبة لنقطة الأصل

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٤ ـ ٣ المسافة بين نقطتين

الرياضيات

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

نواتج التعلّم

حساب المسافة بين نقطتين.

لاحظ!

- المسافة أب بين نقطتين أ(س١، ص١) وب(س٢، ص٢) هى $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$
- فى المسائل التى تكون فيها المسافة بين نقطتين معلومة، **ربّع الطرفين**.

استعِدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد المسافة بين النقطتين الآتيتين. أ(٢، ٦) ، ب(٥، ١٠)

٢ إذا كانت المسافة بين النقطتين أ(٣، −٢) وب(س، ١) تساوى ٥، فأوجد قيمة س.

طريقة الحلّ

١

$$\sqrt{(٥ - ٢)^٢ + (١٠ - ٦)^٢}$$

$$= \sqrt{٢٣ + ٢٤}$$

= ٥

ربّع الطرفين.

٢ بما أنّ المسافة بين النقطتين أ وب تساوى ٥،

$$\sqrt{(س - ٣)^٢ + \{١ - (-٢)\}^٢} = ٥$$

$$(س - ٣)^٢ + \{١ - (-٢)\}^٢ = ٢٥$$

وبحلّ هذه المعادلة، س = −١ ، ٧

حاوِل

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد المسافة بين النقطتين الآتيتين.

(أ) أ(٤، ٣) ، ب(١، ٢)

(ب) أ$(\sqrt{٣}، -١)$ ، ب(٠، ١)

(ج) نقطة الأصل و ، أ(٢، −٤)

٢ إذا كانت المسافة بين النقطتين أ(−١، ٣) وب(س، ١) تساوى ٥، فأوجد قيمة س.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد المسافة بين النقطتين الآتيتين.

(أ) أ(١، ٢) ، ب(١١، ٧)

(ب) أ(٣، −١) ، ب(−١، ٣)

(ج) نقطة الأصل و ، أ(−٣، ٤)

٢ إذا كانت المسافة بين أ(٣، −١) و ب(س، ٢) تساوى ٥، فأوجد س.

٣ إذا كانت المسافة بين أ(١، −٣) و ب(−٢، ص) تساوى $\sqrt{١٣}$ ، فأوجد ص.

٤ إذا كانت المسافة بين النقطتين أ(−١، ٣)، ب(س، ٣) تساوى $\sqrt{٥}$ ، فأوجد قيمة س.

★ التحدّى

إذا كانت المسافة بين النقطتين (س، ٧) و (٣س − ١، −٥) تساوى ١٣ وحدة طول، فأوجد قيمة (أو قيم) س.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٤-٤ النقاط المتساوية البعد عن نقطتين

الرياضيات

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

نواتج التعلّم

تحديد موضع نقطة متساوية البعد عن نقطتين.

لاحِظ!

لإيجاد نقطة متساوية البعد عن نقطتين، عيّن متغيّرات لإحداثيَّيها بناءً على الشروط المعطاة.

نقطة على المحور س ⟸ النقطة المطلوبة هى (ع، ٠)

نقطة على المحور ص ⟸ النقطة المطلوبة هى (٠، ل)

نقطة على المستقيم ص = أس + ب ⟸ النقطة المطلوبة هى (ع، أع + ب)

استعِدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد إحداثيَّ النقطة ف على المحور س المتساوية البعد عن النقطتين أ(−٢، ١) وب(٣، ٤).

٢ أوجد إحداثيَّ النقطة ق على ص = ٢س − ١ المتساوية البعد عن النقطتين أ(١، ٤) وب(٣، ١).

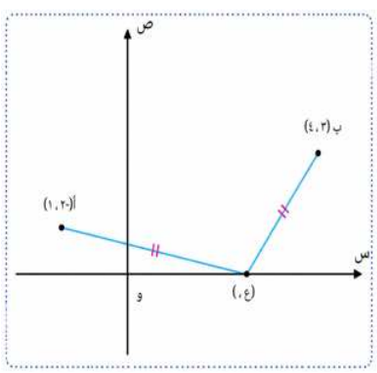
طريقة الحلّ

١ ليكن إحداثيا النقطة ف هما (ع، ٠).

بما أنها متساوية البعد عن النقطتين أ(−٢، ١) وب(٣، ٤)،

أف = ب ف

$$\sqrt{\{ع - (-٢)\}^{٢} + (-١)^{٢}} = \sqrt{(ع - ٣)^{٢} + (-٤)^{٢}}$$



وبتبسيطها وحلّها نحصل على ع = ٢

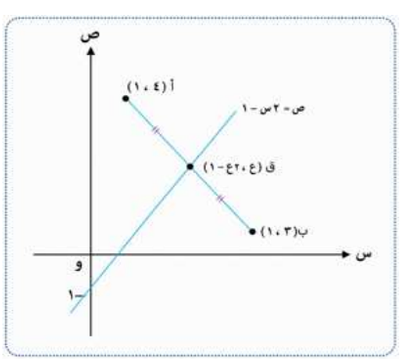
إذن، الإحداثيان المطلوبان هما ف(٢، ٠)

٢ ليكن إحداثيا النقطة ق هما (ع، ٢ع − ١).

بما أنها متساوية البعد عن النقطتين أ(١، ٤) وب(٣، ١)،

أق = ب ق

$$\sqrt{(ع - ١)^{٢} + \{(٢ع - ١) - ٤\}^{٢}} = \sqrt{(ع - ٣)^{٢} + \{(٢ع - ١) - ١\}^{٢}}$$



وبتبسيطها وحلّها نحصل على

$$ع = \frac{١٣}{٨}$$

وبما أنّ النقطة المطلوبة على ص = ٢س − ١، فإنّ

$$ق\left(\frac{١٣}{٨}، \frac{٩}{٤}\right)$$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاوِل

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد إحداثيَّ النقطة ف على المحور ص المتساوية البعد عن النقطتين أ(٤، ٢) وب(١، –١).

٢ أوجد إحداثيَّ النقطة ق على ص = ٣س + ١ المتساوية البعد عن النقطتين أ(٤، –٥) و ب(٢، –٣).

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا الإجابة.

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد إحداثيَّ النقطة ف على المحور س المتساوية البعد عن النقطتين أ(–١، ٢) وب(٤، ٣).

٢ أوجد إحداثيَّ النقطة ف على المحور ص المتساوية البعد عن النقطتين أ(–٥، ٢) وب(٣، ٥).

٣ أوجد إحداثيَّ النقطة ف على المحور س المتساوية البعد عن النقطتين أ(–١، ٢) وب(٣، ٨).

٤ أوجد إحداثيَّ النقطة ق على ص = ٢س – ٣ المتساوية البعد عن النقطتين أ(١، ٤) وب(٣، –٢).

٥ أوجد إحداثيَّ النقطة ق على ص = س – ١ المتساوية البعد عن النقطتين أ(–١، ٥) وب(٧، –١) .

٦ أوجد إحداثيَّ النقطة ق على ص = –س + ١ المتساوية البعد عن النقطتين أ(١، ٢) وب(–٣، ٦) .

★ التحدِّى

إذا كانت أ(٢، ١) وب(٤، ٥) وجـ(٣، ص) ود(س، ٠) بحيث جـ أ = جـ ب و د أ = د ب، فأوجد جـ د.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٤-٥ نقاط القسمة الداخلية والخارجية على المستوى الإحداثى

الرياضيات

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

نواتج التعلّم

إيجاد إحداثيّى نقطة القسمة (الداخلية والخارجية) لقطعة مستقيمة على المستوى الإحداثى.

لاحظ!

بالنسبة للقطعة المستقيمة أب التى تصل بين نقطتين أ(س١، ص١) وب(س٢، ص٢) على المستوى الإحداثى:

(أ) إحداثيا النقطة ف التى تقسم القطعة أب داخليًا بالنسبة م : ن هما

$$\left(\frac{\text{ن س}_١ + \text{م س}_٢}{\text{م} + \text{ن}}\ ،\ \frac{\text{ن ص}_١ + \text{م ص}_٢}{\text{م} + \text{ن}}\right)$$

(ب) إحداثيا النقطة ق التى تقسم القطعة أب خارجيًا بالنسبة م : ن هما

$$\left(\frac{-\text{ن س}_١ + \text{م س}_٢}{\text{م} - \text{ن}}\ ،\ \frac{-\text{ن ص}_١ + \text{م ص}_٢}{\text{م} - \text{ن}}\right)$$

(جـ) بما أنّ نقطة المنتصف م تقسم القطعة أب داخليًا بالنسبة ١ : ١، فإنّ إحداثيَّيها هما

$$\text{م}\left(\frac{\text{س}_١ + \text{س}_٢}{٢}\ ،\ \frac{\text{ص}_١ + \text{ص}_٢}{٢}\right)$$

إحداثيي نقطة تقاطع متوسطات المثلث ز أبجـ الذى رؤوسه أ(س١ ، ص١) وب(س٢،ص٢) وجـ(س٣،ص٣) هما: $\text{ز}\left(\frac{\text{س}_١ + \text{س}_٢ + \text{س}_٣}{٣}\ ،\ \frac{\text{ص}_١ + \text{ص}_٢ + \text{ص}_٣}{٣}\right)$

$\frac{\text{ن س}_١ + \text{م س}_٢}{\text{م} + \text{ن}}$ $\frac{-\text{ن س}_١ + \text{م س}_٢}{\text{م} - \text{ن}}$

انتبه إلى ترتيب الضرب.

استعِدّ

أُعطيت ثلاث نقاط أ(−٢، −٣) وب(٣، ٧) وجـ(٥، ٢)، أوجد إحداثيات النقاط الآتية:

(أ) النقطة ف التى تقسم القطعة بأ داخليًا بالنسبة ١ : ٢

(ب) النقطة ق التى تقسم القطعة بجـ خارجيًا بالنسبة ١ : ٣

(جـ) نقطة المنتصف م للقطعة جـأ

(د) إحداثيي نقطة تقاطع متوسطات المثلث ز للمثلث أبجـ

طريقة الحلّ

(أ)

$$\left(\frac{٢ \times ١ + ٣ \times (-٢)}{٢ + ١}\ ،\ \frac{٢ \times ١ + ٧ \times (-٣)}{٢ + ١}\right)$$

إذن،

$$\text{ف}\left(\frac{٤}{٣}\ ،\ \frac{١١}{٣}\right)$$

(ب)

$$\left(\frac{-٣ \times ١ + ٣ \times ٥}{٣ - ١}\ ،\ \frac{-٣ \times ١ + ٧ \times ٢}{٣ - ١}\right)$$

إذن،

$$\text{ق}\left(٢\ ،\ \frac{١٩}{٢}\right)$$

(جـ)

$$\left(\frac{(-٢) + ٥}{٢}\ ،\ \frac{(-٣) + ٢}{٢}\right)$$

إذن،

$$\text{م}\left(\frac{٣}{٢}\ ،\ -\frac{١}{٢}\right)$$

(د)

$$\left(\frac{-٢ + ٣ + ٥}{٣}\ ،\ \frac{-٣ + ٧ + ٢}{٣}\right)$$

إذن، ز(٢،٢)

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاوِل

أُعطيت ثلاث نقاط أ(–٣، ٤) وب(١، –٤) وجـ(– ٤، ٣)، أوجد إحداثيات النقاط الآتية:

١ النقطة ف التى تقسم القطعة أجـ داخليًا بالنسبة ٣ : ١

٢ النقطة ق التى تقسم القطعة بجـ خارجيًا بالنسبة ٢ : ٣

٣ نقطة المنتصف م للقطعة أب

٤ إحداثي نقطة تقاطع متوسطات المثلث ز للمثلث أبجـ

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤالين ٣ و ٤ ثم ناقِشوا الإجابة.

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ أُعطيت ثلاث نقاط أ(٢، ٣) وب(٢، –٣) وجـ(–٢، ٣)، أوجد إحداثيات النقاط الآتية:

(أ) ف التى تقسم أب داخليًا بالنسبة ٤ : ١ · **(ب)** ق التى تقسم بجـ خارجيًا بالنسبة ٢ : ٣

(جـ) نقطة المنتصف م للقطعة جـأ · **(د)** إحداثي نقطة تقاطع متوسطات المثلث ز للمثلث أبجـ

٢ أُعطيت ثلاث نقاط أ(–٢، ١) وب(٦، –٣) وجـ(١، ٧)، أوجد إحداثيات النقاط الآتية:

(أ) ف التى تقسم بجـ داخليًا بالنسبة ٣ : ٢ · **(ب)** ق التى تقسم جـأ خارجيًا بالنسبة ٣ : ٢

(جـ) نقطة المنتصف م للقطعة أب · **(د)** إحداثي نقطة تقاطع متوسطات المثلث ز للمثلث أبجـ

٣ أُعطيت ثلاث نقاط أ(– ٤، ٥) وب(١، –٥) وجـ(٣، ٠)، أوجد إحداثيات النقاط الآتية:

(أ) ف التى تقسم بأ داخليًا بالنسبة ١ : ٢ · **(ب)** ق التى تقسم بجـ خارجيًا بالنسبة ١ : ٣

(جـ) نقطة المنتصف م للقطعة بجـ · **(د)** إحداثي نقطة تقاطع متوسطات المثلث ز للمثلث أبجـ

★ التحدّى

إذا كانت أ(٢، ١) وب(٤، ٥) وجـ(٣، ص) ود(س، ٠) بحيث جـ أ = جـ ب و د أ = د ب، فأوجد جـ د.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

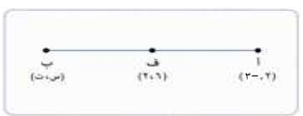
٤-٦ النقاط المتماثلة

الرياضيات

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

نواتج التعلّم

تحديد النقطة المتماثلة.



لاحِظ!

النقطتان ب وجـ متماثلتان بالنسبة للنقطة أ ⟺ النقطة أ هى نقطة منتصف القطعة بجـ.
وعند إيجاد النقاط المتماثلة، ارسم أوّلًا شكلًا لتفهم المواضع النسبية للنقاط. ثم افرض أنّ الإحداثيين المطلوبين هما (ع، ل) وعبِّر عن نقطة المنتصف بدلالة ع ول.

استعِدّ

أوجد إحداثيَّى النقطة ب المتماثلة مع النقطة أ(–٣، ٢) بالنسبة للنقطة ف(٢، ٦).

طريقة الحلّ

ليكن إحداثيا النقطة ب هما (ع، ل).

عبِّر عن نقطة المنتصف بدلالة ع و ل.

يمكن التعبير عن إحداثيَّى نقطة منتصف القطعة أب بالصورة

$$\left(\frac{-٣+ع}{٢}\ ،\ \frac{٢+ل}{٢}\right)$$

وبما أنّ هذه النقطة تنطبق على النقطة ف(٢، ٦)،

$$\left.\begin{array}{l}\frac{-٣+ع}{٢}=٢\\ \frac{٢+ل}{٢}=٦\end{array}\right\}$$

وبحلّ هاتين المعادلتين نحصل على ع = ٧ ول = ١٠

إذن، الإحداثيان المطلوبان هما ب(٧، ١٠)

حاوِل

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد إحداثيَّى النقطة ب المتماثلة مع النقطة أ(١، –٢) بالنسبة للنقطة ف(٢، ٣).

٢ أوجد إحداثيَّى النقطة ق المتماثلة مع النقطة ف(٣، ٢) بالنسبة للنقطة أ(–١، ٥).

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد إحداثيَّى النقطة ب المتماثلة مع النقطة أ(–٣، ١) بالنسبة للنقطة ف(٢، ٠).

٢ أوجد إحداثيَّى النقطة ب المتماثلة مع النقطة أ(٧، ٤) بالنسبة للنقطة م(–٣، ٥).

٣ أوجد إحداثيَّى النقطة ب المتماثلة مع النقطة أ(٤، –٨) بالنسبة للنقطة ف(–٣، ٢).

٤ أوجد إحداثيَّى النقطة ق المتماثلة مع النقطة ف(٠، –٤) بالنسبة للنقطة أ(–٤، ١).

٥ أوجد إحداثيَّى النقطة ب المتماثلة مع النقطة أ(–٤، ٢) بالنسبة للنقطة ف(–١، –٣).

★ التحدِّى

إذا كانت النقطتان ب(م، ٥) وجـ(٤، ن) متماثلتين بالنسبة للنقطة أ(١، –١)، فأوجد م + ن.

تأمَّل

إذا غيّرنا نسبة تقسيم قطعة مستقيمة، فكيف يتغيّر موضع النقطة على تلك القطعة؟ وكيف يساعدنا التفكير فى النِّسَب والمسافات المرجعية على فهم المواضع فى الرياضيات وفى الحياة اليومية؟

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٧-٤
الرياضيات

أنواع المثلثات

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

المفهوم ٢ · المثلثات والمستقيمات

فى الطبّ الحديث، تحديدُ هدفٍ داخل جسم الإنسان تحديدًا دقيقًا مسألةُ حياة أو موت. ففى أثناء الجراحة الإشعاعية التجسيمية، تُصوَّب حزمٌ إشعاعية ضيّقة متعدّدة من زوايا مختلفة لتتقاطع بدقّة عند الورم.

وبنمذجة هذه الحزم الإشعاعية مستقيماتٍ فى نظام إحداثى ثلاثى الأبعاد، يحسب فيزيائيّو الطبّ معادلاتها المضبوطة ليضمنوا تقاطعها عند نقطة واحدة (الورم) مع تقليل الضرر بالأنسجة السليمة المحيطة إلى أدنى حدّ. فإن لم تتقاطع المستقيمات تقاطعًا صحيحًا، أو كوّنت مثلثًا عارضًا حول الورم بدل أن تلتقى عند نقطة بعينها، أخفق العلاج.

السؤال الموجّه: كيف نستعمل المعادلات الجبرية للمستقيمات لنضمن تقاطع عدّة مسارات عند نقطة هدفٍ واحدة مضبوطة، وكيف نحدّد الحدود الهندسية للمساحات التى تؤثّر فيها؟

نواتج التعلّم

استعمال الإحداثيات لتحديد أنواع المثلثات (متطابق الساقين، قائم الزاوية، ... إلخ).

لاحِظ!

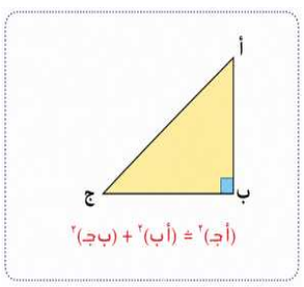
- لتحديد نوع المثلث أبجـ، احسب (أب)^{٢} و(بجـ)^{٢} و(جـأ)^{٢}.
- فى المثلث أبجـ:

إذا كان (أب)^{٢} = (بجـ)^{٢} = (جـأ)^{٢}، فالمثلث أبجـ **متطابق الأضلاع**.

إذا كان (أب)^{٢} = (بجـ)^{٢} ≠ (جـأ)^{٢}، فالمثلث أبجـ **متطابق الساقين**.

إذا كان (أجـ)^{٢} = (أب)^{٢} + (بجـ)^{٢}، فالمثلث أبجـ **قائم الزاوية**.

ملاحظة: إذا تحقّق الشرطان معًا، فهو **متطابق الساقين وقائم الزاوية**.

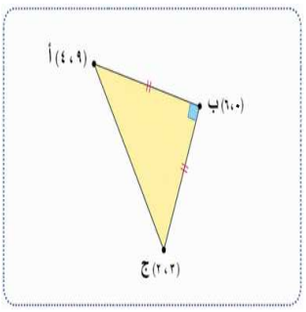


موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

استعِدّ

حدّد شكل المثلث أبجـ الذى رؤوسه أ(٤، ٩) وب(٠، ٦) وجـ(٣، ٢).

طريقة الحلّ



$(أب)^{٢} = (٠ - ٤)^{٢} + (٦ - ٩)^{٢}$

$= ٢٥$ ..... (١)

$(بجـ)^{٢} = (٣ - ٠)^{٢} + (٢ - ٦)^{٢}$

$= ٢٥$ ..... (٢)

$(جـأ)^{٢} = (٣ - ٤)^{٢} + (٢ - ٩)^{٢}$

$= ٥٠$ ..... (٣)

من (١) و(٢)، المثلث أبجـ متطابق الساقين.

ومن (١) و(٢) و(٣)، بما أنّ $(جـأ)^{٢} = (أب)^{٢} + (بجـ)^{٢}$، فالمثلث أبجـ قائم الزاوية.

إذن، المثلث أبجـ **متطابق الساقين وقائم الزاوية** حيث $\angle ب = ٩٠^\circ$.

حاوِل

حلّ المسائل الآتية.

١ حدّد نوع المثلث أبجـ الذى رؤوسه أ(−١، ٢) وب(١، ١) وجـ(٠، ٤).

٢ حدّد نوع المثلث أبجـ الذى رؤوسه أ(٣، ٢) وب(−١، ٠) وجـ$(١ + \sqrt{٣}، ١ - ٢\sqrt{٣})$.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقِشوا الإجابة.

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ حدّد شكل المثلث أبجـ الذى رؤوسه أ(٢، ٠) وب(−١ ـ ٢) وجـ(١، ٤).

٢ حدّد نوع المثلث أبجـ الذى رؤوسه أ(٢، ٢) وب(٢، ٠) وجـ$(\sqrt{٣} + ٢، ١)$.

٣ حدّد نوع المثلث أبجـ الذى رؤوسه أ(١، ٢) وب(٥، ٨) وجـ(١١، ٤).

٤ حدّد نوع المثلث أبجـ الذى رؤوسه أ(−٣، ٤) وب(١، ٧) وجـ(٣، −٤).

٥ حدّد نوع المثلث أبجـ الذى رؤوسه أ(−١، ١) وب(٤، ٢) وجـ(١، ٤).

★ التحدّى

إذا كانت أ(١، ٢) وب(٢ك، ك) وجـ(٤، ٥)، وكان المثلث أبجـ متطابق الساقين وقائم الزاوية عند ب، فأوجد ك.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٤-٨ معادلة الخط المستقيم

الرياضيات

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

نواتج التعلّم

إيجاد معادلة الخط المستقيم بصورها المختلفة.

لاحِظ!

معادلة مستقيم موازٍ لأحد المحورين

- معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $(س_١، ص_١)$ والموازى للمحور س هى $ص = ص_١$
- معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $(س_١، ص_١)$ والعمودى على المحور س هى $س = س_١$
- معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $(س_١، ص_١)$ والموازى للمحور ص هى $س = س_١$
- معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين $(س_١، ص_١)$ و$(س_٢، ص_١)$ هى $ص = ص_١$
- معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين $(س_١، ص_١)$ و$(س_١، ص_٢)$ هى $س = س_١$

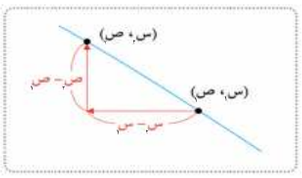
إذا عُلم **الميل** ونقطة على المستقيم، أمكن تعيين معادلة المستقيم.

- معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $(س_١، ص_١)$ وميله أ هى $ص - ص_١ = أ(س - س_١)$
- ميل المستقيم المارّ بالنقطتين $(س_١، ص_١)$ و$(س_٢، ص_٢)$ حيث $س_١ \neq س_٢$ هو

$$أ = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

الإحداثيان ص للنقطتين متساويان.

الإحداثيان س للنقطتين متساويان.



استعِدّ

أوجد معادلات المستقيمات الآتية.

(أ) المستقيم المارّ بالنقطة (٣، −٤) والموازى للمحور س

(ب) المستقيم المارّ بالنقطة (−٣، ٨) والموازى للمحور ص

(جـ) المستقيم المارّ بالنقطتين (−٣، ١) و(−٣، ٢)

(د) المستقيم المارّ بالنقطتين (−٢، ٣) و(−٥، ٣)

(هـ) المستقيم المارّ بالنقطة (٢، −١) وميله ٣

(و) المستقيم المارّ بالنقطتين (١، −١) و(٤، ٠)

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

طريقة الحلّ

(أ) ص = –٤

(ب) س = –٣

(جـ) بما أنّ الإحداثيين س للنقطتين متساويان،

س = –٣

(د) بما أنّ الإحداثيين ص للنقطتين متساويان،

ص = ٣

(هـ) ص – (–١) = ٣(س – ٢)

عبِّر عن المعادلة بالصورة ص = م س + ك.

ص = ٣س – ٧

(و)

$$ص - (-١) = \frac{٠ - (-١)}{٤ - ١}(س - ١)$$

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$ص = \frac{١}{٣}س - \frac{٤}{٣}$$

حاوِل

أوجد معادلات المستقيمات الآتية.

١ المستقيم المارّ بالنقطة (٢، ٦) والموازى للمحور س

٢ المستقيم المارّ بالنقطة (٣، ٥) والعمودى على المحور س

٣ المستقيم المارّ بالنقطتين (–٢، –٢) و(٢، –٢)

٤ المستقيم المارّ بالنقطتين (–٤، ٢) و(–٤، ٨)

٥ المستقيم المارّ بالنقطة (–٣، ٤) وميله ٢

٦ المستقيم المارّ بالنقطتين (–٢، –٦) و(–٤، ١)

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤالين ٥ و ٦ ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

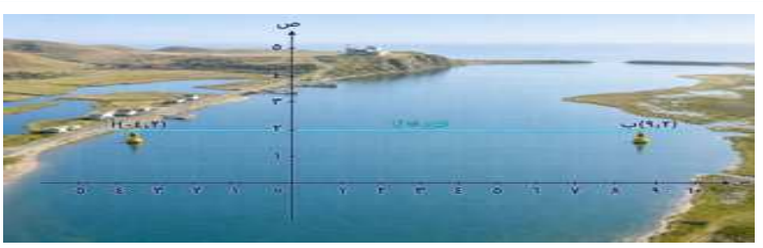
تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معادلات المستقيمات الآتية.

(أ) المارّ بالنقطة (–٤، ٥) والموازى للمحور س
(ب) المارّ بالنقطة (٢، ١) والموازى للمحور س
(جـ) المارّ بالنقطة (–٤، –٧) والموازى للمحور س
(د) المارّ بالنقطة (١، –٢) والعمودى على المحور س
(هـ) المارّ بالنقطة (–٣، –٤) والعمودى على المحور س
(و) المارّ بالنقطة (٣، –٥) والعمودى على المحور س
(ز) المارّ بالنقطة (٢، –٧) والموازى للمحور ص
(ح) المارّ بالنقطة (٤، ٣) والموازى للمحور ص
(ط) المارّ بالنقطة (–٦، –٢) والموازى للمحور ص
(ى) المارّ بالنقطتين (٤، ٠) و(٤، ٣)
(ك) المارّ بالنقطتين (–١، ٢) و(–١، ٦)
(ل) المارّ بالنقطتين (–٥، –٣) و(–٥، ٢)
(م) المارّ بالنقطتين (–٢، ٣) و(–٣، ٣)
(ن) المارّ بالنقطتين (٤، –٢) و(١، –٢)
(س) المارّ بالنقطتين (–٣، ٦) و(٢، ٦)
(ع) المارّ بالنقطة (–١، ٥) وميله –١
(ف) المارّ بالنقطة (–٣، –٨) وميله ١
(ص) المارّ بالنقطة (٢، –١) وميله –٢
(ق) المارّ بالنقطتين (١، ٢) و(٣، ١٠)
(ر) المارّ بالنقطتين (–١، –٨) و(٤، ٢)

★ التحدِّى



يرصد فريق أبحاث بيئية تغيّرات منسوب البحر فى مصبٍّ ساحلىٍّ حسّاس. وقد أقاموا نظام شبكة يكون فيه:

المحور س يمثّل المسافة من محطة الأبحاث المركزية.

المحور ص يمثّل ارتفاع سطح البحر المحلّى.

وفى أثناء دراسة للمدّ والجزر، سجّلت المجسّات فى محطّتَى رصد مختلفتين ارتفاعَين متطابقَين ومستقرَّين لسطح البحر:

المجسّ الغربى عند الإحداثيات (–٤، ٢).

المجسّ الشرقى عند الإحداثيات (٩، ٢).

ولرسم الحدّ المنتظم لمنسوب المياه هذا عبر المصبّ، يحتاج الفريق إلى إيجاد معادلة الحدّ المستقيم الواصل بين هذين المجسَّين.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٤-٩ تطبيقات معادلة الخط المستقيم

الرياضيات

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

نواتج التعلّم

معادلة الخط المستقيم بصورها المختلفة، وتطبيقها فى مواقف هندسية.

لاحظ!

- المعادلة التى على الصورة أس + بص + جـ = ٠ (حيث أ ≠ ٠ أو ب ≠ ٠) تمثّل هى أيضًا خطًّا مستقيمًا.
- يمكن إيجاد معادلة الخط المستقيم إذا عُلم **الميل** ونقطةٌ على المستقيم.
- يمكن إيجاد ميل المستقيم باستخدام **نقطتين عليه**.

استعِدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كانت النقاط الثلاث أ(٢، ٣) وب(٤، –١) وجـ(ع – ١، ٢ – ع) تقع على استقامة واحدة، فأوجد قيمة الثابت ع.

٢ أوجد معادلة المستقيم المارّ بنقطة تقاطع المستقيمين ٢س – ٣ص + ١ = ٠ و س + ٢ص – ٣ = ٠، والمارّ بالنقطة (–١، ٣).

طريقة الحلّ

١ معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين أ(٢، ٣) وب(٤، –١) هى:

أوجد معادلة المستقيم من نقطتين معلومَتَى الإحداثيات.

$$ص - ٣ = \frac{-١ - ٣}{٤ - ٢}(س - ٢)$$

وبتبسيطها نحصل على ص = –٢س + ٧ ..... (١)

وبما أنّ (١) تمرّ بالنقطة جـ(ع – ١، ٢ – ع):

عوّض بإحداثيَّى النقطة جـ فى (١).

٢ – ع = –٢(ع – ١) + ٧

وبحلّها نحصل على ع = ٧

٢ ٢س – ٣ص + ١ = ٠ ..... (١)

س + ٢ص – ٣ = ٠ ..... (٢)

حلّ معادلتَى المستقيمين آنيًّا لإيجاد نقطة التقاطع.

وبحلّ هذا النظام آنيًّا نحصل على س = ١ وص = ١

إحداثيا نقطة تقاطع (١) و(٢) هما (١، ١).

ومعادلة المستقيم المارّ بالنقطتين (١، ١) و(–١، ٣) هى:

$$ص - ١ = \frac{٣ - ١}{-١ - ١}(س - ١)$$

اكتب الإجابة بالصورة أس + بص + جـ = ٠ كما فى السؤال.

أى س + ص – ٢ = ٠

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاوِل

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كانت النقاط الثلاث أ(٢، ٥) وب(٤، ٩) وجـ(−١، ع) تقع على استقامة واحدة، فأوجد قيمة الثابت ع.

٢ أوجد معادلة المستقيم المارّ بنقطة تقاطع المستقيمين س + ٢ص − ١٠ = ٠ و ٢س + ٣ص − ٧ = ٠، والمارّ بالنقطة (٥، ٦).

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كانت النقاط الثلاث أ(١، −١) وب(−٢، −٣) وجـ(٤، ع) تقع على استقامة واحدة، فأوجد قيمة الثابت ع.

٢ إذا كانت النقاط الثلاث أ(١، ٢) وب(٣، ١) وجـ(ع، −١) تقع على استقامة واحدة، فأوجد قيمة الثابت ع.

٣ إذا كانت النقاط الثلاث أ(−٣، −٩) وب(٥، ٧) وجـ(ع + ٣ ، ٣ع − ٢) تقع على استقامة واحدة، فأوجد قيمة الثابت ع.

٤ أوجد معادلة المستقيم المارّ بنقطة تقاطع المستقيمين ٣س + ٥ص − ١ = ٠ و ٧س + ٨ص − ٦ = ٠، والمارّ بالنقطة (−١، ٢).

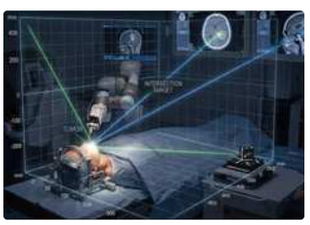
٥ أوجد معادلة المستقيم المارّ بنقطة تقاطع المستقيمين س + ٢ص − ٤ = ٠ و ٢س − ص − ٣ = ٠، والمارّ بالنقطة (−٣، −١).

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقِشوا الإجابة.

★ التحدِّى

توجيه إبرة الخزعة الآلية



فى الجراحة المُعانة آليًّا، يوجّه نظام حاسوبى إبرة خزعة إلى ورم عميق. ويقع الورم الهدف عند نقطة التقاطع المضبوطة لمسارَى تصوير تشخيصى (مُنمذَجَين مستقيمين على شبكة إحداثية، حيث الوحدة الواحدة = مليمتر واحد):

• مسار المسح الليزرى أ: ٦س + ٥ص + ٧ = ٠

• مسار المسح الليزرى ب: ٣س − ٢ص + ٥ = ٠

التحدِّى السريرى: ذراع الروبوت الجراحى مثبَّتة عند نقطة أصل النظام (٠، ٠) (نقطة المعايرة الأساسية). ولإجراء الخزعة، على الذراع أن تُدخل إبرة صلبة على مسارٍ مستقيم تمامًا من نقطة الأصل (٠، ٠) مباشرةً إلى الورم عند نقطة التقاطع.

وعلى مهندسى البرمجيات حساب المعادلة الخطّية المضبوطة لمسار الإبرة هذا لبرمجة مسار ذراع الروبوت.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٤-١٠ المستقيمات المتوازية والمتعامدة

الرياضيات

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

نواتج التعلّم

تطبيق شرطَى توازى المستقيمات وتعامدها لحلّ مسائل هندسية.

لاحِظ!

- المعادلة التى على الصورة أس + بص + جـ = ٠ (حيث أ ≠ ٠ أو ب ≠ ٠) تمثّل هى أيضًا خطًّا مستقيمًا.
- المسائل المتعلّقة بالمستقيمات المتوازية أو المتعامدة تستعمل **الميول**. فللمستقيمين ص = م$_{١}$س + ك$_{١}$ وص = م$_{٢}$س + ك$_{٢}$:

  المستقيمان متوازيان ⟸ م$_{١}$ = م$_{٢}$، أى أنّ الميلين متساويان.

  المستقيمان متعامدان ⟸

$$م_{١} = -\frac{١}{م_{٢}}$$

  ، أى أنّ الميلين مقلوبان متعاكسان فى الإشارة.
- حلّ المسائل المتعلّقة بالمستقيمات المتوازية أو المتعامدة بتحويل المعادلة إلى الصورة ص = مس + ك.

استعِدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ عيّن أىّ المستقيمات الآتية متوازية وأيّها متعامدة.

(أ) ص = ٢س + ٣ **(ب)** ص = −٣س + ٢ **(جـ)** س − ٣ص + ١ = ٠

(د) ٢س − ص − ١ = ٠ **(هـ)** س + ٣ص + ٣ = ٠

٢ أوجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطة (٢، −٤) والموازى للمستقيم ٣س − ٢ص + ١ = ٠

٣ أوجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطة (−٢، ٥) والعمودى على المستقيم ٣س + ٥ص + ١ = ٠

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

طريقة الحلّ

١ أوجد ميل كل مستقيم.

حوّل المعادلة إلى الصورة ص = م س + ك.

(أ) ص = ٢س + ٣، الميل ٢

(ب) ص = −٣س + ٢، الميل −٣

(جـ) س − ٣ص + ١ = ٠

$$ص = \frac{١}{٣}س + \frac{١}{٣}$$

، الميل

$$\frac{١}{٣}$$

(د) ٢س − ص − ١ = ٠

ص = ٢س − ١، الميل ٢

(هـ) س + ٣ص + ٣ = ٠

$$ص = -\frac{١}{٣}س - ١$$

، الميل

$$-\frac{١}{٣}$$

اختر ذوات الميول المتساوية.

المستقيمان المتوازيان هما **(أ) و(د)**.

اختر ذوات الميول المقلوبة المتعاكسة فى الإشارة.

والمستقيمان المتعامدان هما **(ب) و(جـ)**.

٢ ٣س − ٢ص + ١ = ٠

حوّل إلى الصورة ص = م س + ك وأوجد الميل.

$$ص = \frac{٣}{٢}س + \frac{١}{٢}$$

، الميل

$$\frac{٣}{٢}$$

إذن، المستقيم الموازى المطلوب يمرّ بالنقطة (٢، −٤) وميله

$$\frac{٣}{٢}$$

ميل المستقيم الموازى هو الميل نفسه.

$$ص - (-٤) = \frac{٣}{٢}(س - ٢)$$

اجعل المعادلة على الصورة الواردة فى السؤال (أس + بص + جـ = ٠).

وبتبسيطها نحصل على ٣س − ٢ص − ١٤ = ٠

٣ ٣س + ٥ص + ١ = ٠

$$ص = -\frac{٣}{٥}س - \frac{١}{٥}$$

، الميل

$$-\frac{٣}{٥}$$

إذن، المستقيم العمودى المطلوب يمرّ بالنقطة (−٢، ٥) وميله

$$\frac{٥}{٣}$$

ميل المستقيم العمودى هو المقلوب المعاكس فى الإشارة.

$$ص - ٥ = \frac{٥}{٣}\{س - (-٢)\}$$

اجعل المعادلة على الصورة الواردة في السؤال

وبتبسيطها نحصل على ٥س − ٣ص + ٢٥ = ٠

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاوِل

حلّ المسائل الآتية.

١ عيّن أىّ المستقيمات الآتية متوازية وأيّها متعامدة.

(أ) ص = ٣س + ١ **(ب)** ص = ٤س – ١ **(جـ)** ص = –٤س – ٧

(د) ٦س – ٢ص = ٥ **(هـ)** ٨س + ٢ص – ٣ = ٠ **(و)** س + ٤ص – ٤ = ٠

٢ أوجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطة (١، –٣) والموازى للمستقيم ٦س + ٣ص – ٥ = ٠

٣ أوجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطة (٢، ١) والعمودى على المستقيم ٢س + ٣ص + ٤ = ٠

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ١ ثم ناقِشوا الإجابة.

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ عيّن أىّ المستقيمات الآتية متوازية وأيّها متعامدة.

(أ) ص = ٣س – ١ **(ب)** ص = –٣س + ٤ **(جـ)** ص = س – ٣

(د) ٦س + ٢ص + ٥ = ٠ **(هـ)** ٢س – ٢ص – ١ = ٠ **(و)** س + ٣ص – ٢ = ٠

٢ عيّن أىّ المستقيمات الآتية متوازية وأيّها متعامدة.

(أ) ص = ٢س – ١ **(ب)** ص = –س + ٤ **(جـ)** ص = $\frac{٣}{٢}$س + ٦

(د) س + ص + ٣ = ٠ **(هـ)** ٢س + ٣ص + ٨ = ٠ **(و)** ٣س + ٦ص – ١ = ٠

٣ أوجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطة (١، –٢) والموازى للمستقيم ٢س – ص + ٥ = ٠

٤ أوجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطة (–١، ٢) والموازى للمستقيم ٢س + ٣ص = ٠

٥ أوجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطة (٣، –١) والموازى للمستقيم ٣س + ٢ص + ١ = ٠

٦ أوجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطة (٢، –٥) والعمودى على المستقيم ٢س + ص – ١ = ٠

٧ أوجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطة (–١، ٣) والعمودى على المستقيم ٥س – ٢ص + ٣ = ٠

٨ أوجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطة (–٢، –٥) والعمودى على المستقيم
٣س – ٢ص – ٧ = ٠

★ التحدّى

للمستقيمات ل١ : ٢س + ٣ص – ١٠ = ٠ ول٢ : كس – ٢ص + ٥ = ٠ و
ل٣ : ٤س + مص – ١ = ٠، إذا كان ل١ ⊥ ل٢ ول١ ∥ ل٣، فأوجد
$\frac{م}{ك}$
.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٤-١١
الرياضيات

محور القطعة المستقيمة والنقاط المتماثلة بالنسبة لمستقيم

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

نواتج التعلّم

استنتاج معادلة محور القطعة المستقيمة وتعيين نقاط التماثل بالنسبة لمستقيم، وتطبيق هذين المفهومين فى سياقات هندسية.

لاحظ!

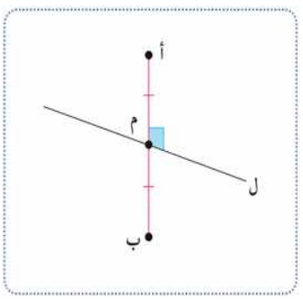
- بما أن محور القطعة المستقيمة (أب) عمودىٌّ على المستقيم أب ويمرّ بنقطة منتصف القطعة (أب)، فإنه يُوجَد باستعمال ميل المستقيم (أب) وإحداثيَّى نقطة منتصف القطعة (أب).
- لإيجاد إحداثيَّى النقطة ب(ع، ل) المتماثلة مع النقطة أ بالنسبة للمستقيم ل، نعبّر عن الشرطين الآتيين بمعادلتين ونحلّهما آنيًّا: القطعة المستقيمة (أب) عمودية على ل، ونقطة منتصف (أب) تقع على المستقيم ل.

استعِدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كانت النقطتان أ(٥، ١١) وب(١، −١)، فأوجد معادلة محور القطعة المستقيمة (أب).

٢ أوجد إحداثيَّى النقطة ب المتماثلة مع النقطة أ(−٤، ٣) بالنسبة للمستقيم ٣س − ص + ٥ = ٠



طريقة الحلّ

١ ميل المستقيم (أب) هو

$$\frac{-١ - ١١}{٥ - ١} = ٣$$

، فميل المستقيم العمودى عليه هو

$$-\frac{١}{٣}$$

ميل المستقيم العمودى هو المقلوب المعاكس فى الإشارة.

وكذلك، إحداثيا نقطة منتصف القطعة (أب) هما

$$\left(\frac{١ + ٥}{٢}\ ،\ \frac{١١ - ١}{٢}\right)$$

، أى (٣، ٥)

إذن، محور القطعة (أب) مستقيمٌ يمرّ بالنقطة (٣ ٥) وميله

$$-\frac{١}{٣}$$

، فيكون:

$$ص - ٥ = -\frac{١}{٣}(س - ٣)$$

وبتبسيطها نحصل على س + ٣ص − ١٨ = ٠

٢ ليكن إحداثيا النقطة ب هما (ع، ل)، وليكن المستقيم ٣س − ص + ٥ = ٠ هو ل.

ميل المستقيم (أب) هو

$$\frac{ل - ٣}{ع + ٤}$$

حوّل ل إلى ص = ٣س + ٥ لإيجاد الميل.

، وميل ل هو ٣

وبما أنّ (أب) ⊥ ل، فإنّ

$$\frac{ل - ٣}{ع + ٤} = -\frac{١}{٣}$$

ميل المستقيم العمودى هو المقلوب المعاكس فى الإشارة.

وبتبسيطها نحصل على ع + ٣ل − ٥ = ٠ ..... (١)

وكذلك، بما أنّ إحداثيَّى نقطة منتصف القطعة (أب) وهما

$$\left(\frac{-٤ + ع}{٢}\ ،\ \frac{٣ + ل}{٢}\right)$$

يقعان على ل:

عوّض بـ

$$س = \frac{-٤ + ع}{٢}$$

و

$$ص = \frac{٣ + ل}{٢}$$

فى معادلة ل.

$$٣ \times \frac{-٤ + ع}{٢} - \frac{٣ + ل}{٢} + ٥ = ٠$$

وبتبسيطها نحصل على ٣ع − ل − ٥ = ٠ ..... (٢)

وبحلّ (١) و(٢) آنيًّا نحصل على ع = ٢ ول = ١

إذن، إحداثيا النقطة ب هما ب(٢، ١)

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاوِل

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كانت النقطتان أ(−١، ٢) وب(٣، −٤)، فأوجد معادلة محور القطعة المستقيمة (أب).

٢ أوجد إحداثيَّى النقطة ب المتماثلة مع النقطة أ(٠، ٤) بالنسبة للمستقيم ٢س − ص − ١ = ٠

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معادلات محاور القطع المستقيمة أب الآتية.

(أ) أ(−٢، ٣) ، ب(٢، ١) **(ب)** أ(−١، ٢) ، ب(٥، −٢) **(جـ)** أ(٠، ٦) ، ب(٤، ٤)

٢ أوجد إحداثيَّى النقطة ب المتماثلة مع النقطة أ(١، ٢) بالنسبة للمستقيم س + ٢ص − ١٠ = ٠

٣ أوجد إحداثيَّى النقطة ب المتماثلة مع النقطة أ(٤، −١) بالنسبة للمستقيم
٤س − ٢ص − ٣ = ٠

★ التحدِّى

فى نظام ليزر جراحى للعيون، يُنمذَج خطُّ ليزر التصويب بالمعادلة ص = ٢س. وإذا وُضع مجسّ معايرة عند النقطة أ(٥، ٠)، و
وضع مستقبِل الإشارة عند النقطة ب، وهى الانعكاس الم
المضبوط للنقطة أ حول خطّ الليزر.

أوجد إحداثيَّى النقطة الهدف ب لضمان دقّة معايرة النظام.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٤ - ١٢
الرياضيات

المسافة بين نقطة ومستقيم

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

لاحظ!

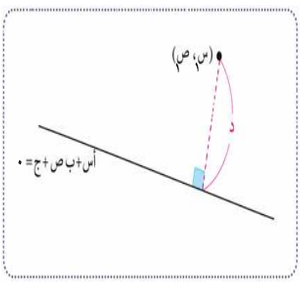
- المسافة د بين النقطة $(س_١ ، ص_١)$ والمستقيم أس + بص + جـ = ٠ هى:

$$د = \frac{|أس_١ + بص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$$

- لإيجاد طول العمود المرسوم من نقطة إلى مستقيم، يكفى إيجاد المسافة بين النقطة والمستقيم.

نواتج التعلّم

حساب المسافة العمودية من نقطة إلى مستقيم.
وتطبيق هذه المهارة فى حلّ مسائل هندسية.



استعِدّ

أوجد القيم الآتية.

١ المسافة د بين النقطة (−٢، ١) والمستقيم ٣س − ٢ص + ٥ = ٠

٢ طول العمود وح المرسوم من نقطة الأصل و إلى المستقيم ٣س − ص = ٥

طريقة الحلّ

١

$$د = \frac{|٣ \times (-٢) + ١ \times (-٢) + ٥|}{\sqrt{٣^٢ + (-٢)^٢}}$$

$$= \frac{|-٣|}{\sqrt{١٣}}$$

$$= \frac{٣}{\sqrt{١٣}}$$

$$= \frac{٣\sqrt{١٣}}{١٣}$$

٢ طول العمود المرسوم من نقطة إلى مستقيم هو المسافة بين النقطة والمستقيم.

وبتحويل ٣س − ص = ٥ نحصل على ٣س − ص − ٥ = ٠ فيمكن استعمال القانون.

حوّل إلى الصورة
أس + بص + جـ = ٠.

$$وح = \frac{|٣ \times ٠ + (-١) \times ٠ - ٥|}{\sqrt{٣^٢ + (-١)^٢}}$$

$$= \frac{\sqrt{١٠}}{٢}$$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاوِل

أوجد القيم الآتية.

١ المسافة بين النقطة (٣، –٢) والمستقيم س + ٢ص – ٤ = ٠

٢ طول العمود المرسوم من النقطة (–١، ٥) إلى المستقيم ص = ٣س – ٢

تدرَّب

أوجد القيم الآتية.

١ المسافة بين النقطة (–٣، ٢) والمستقيم ٢س – ٣ص + ٦ = ٠

٢ المسافة بين النقطة (–٣، ٧) والمستقيم ١٢س – ٥ص = ٧

٣ المسافة بين النقطة (–٨، ١) والمستقيم ص = ٢س – ٣

٤ المسافة بين نقطة الأصل والمستقيم ٣س – ٤ص – ٥ = ٠

٥ طول العمود المرسوم من النقطة (٢، ٣) إلى المستقيم ٣س + ٢ص + ١ = ٠

٦ طول العمود المرسوم من النقطة (١٣، ٤) إلى المستقيم ٣س + ٤ص – ٥ = ٠

٧ طول العمود المرسوم من النقطة (١، ٢) إلى المستقيم ص = ٣س + ١

★ التحدّى

فى الجراحة الإشعاعية التجسيمية، تُنمذَج حزمة إشعاع ضيّقة بالمستقيم

$$ص = \frac{١}{٣}س + ٢$$

. ويقع مركزُ عصبيٌّ حرج (مُنمذَج نقطةً) قريبًا منها عند ف(–١، ٥).

ولمنع الضرر الإشعاعى، على فيزيائيّى الطبّ حساب أقصر مسافة (عمودية) من المركز العصبى إلى مسار حزمة الإشعاع. أوجد هذه المسافة للتأكّد من استيفائها هامش الأمان المطلوب.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٤-١٣ مساحة المثلث

الرياضيات

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

لاحِظ!

كيف نوجد مساحة المثلث أبجـ على المستوى الإحداثى:

- للقاعدة: أوجد **المسافة بين النقطتين** أ **و**ب.
- للارتفاع: أوجد **المسافة بين النقطة** جـ **والمستقيم** (أب).

استعِدّ

أوجد مساحة المثلث أبجـ الذى رؤوسه أ(١، ١) وب(٣، ٧) وجـ(−٣، −١).

طريقة الحلّ

أوجد القاعدة.

$$(أب) = \sqrt{(٣-١)^{٢} + (٧-١)^{٢}}$$

$$= ٢\sqrt{١٠} \quad \ldots\ldots (١)$$

أوجد معادلة المستقيم أب، وهى لازمة لحساب الارتفاع.

معادلة المستقيم (أب) هى ص − ١ = $\frac{٧-١}{٣-١}$(س − ١)

وبتبسيطها نحصل على ٣س − ص − ٢ = ٠

أوجد الارتفاع.

والمسافة بين النقطة جـ والمستقيم (أب) هى:

$$\frac{|٣ \times (-٣) + (-١) \times (-١) - ٢|}{\sqrt{٣^{٢} + (-١)^{٢}}} = \sqrt{١٠} \quad \ldots\ldots (٢)$$

من (١) و(٢)، مساحة المثلث أبجـ المطلوبة هى:

$$\frac{١}{٢} \times ٢\sqrt{١٠} \times \sqrt{١٠} = ١٠$$

حاوِل

أوجد مساحات المثلثات أبجـ المعطاة رؤوسها كما يلى.

(أ) أ(١، ٥) ، ب(−٣، −٣) ، جـ(٣، −٦)

(ب) أ(−٢، ١) ، ب(٢، −١) ، جـ(٠، ٤)

تدرَّب

أوجد مساحات المثلثات أبجـ المعطاة رؤوسها كما يلى.

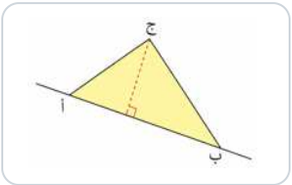
(أ) أ(٠، −٦) ، ب(٢، −٢) ، جـ(١، ٥)

(ب) أ(−٢، ٤) ، ب(−٣، −٥) ، جـ(٥، −١)

(جـ) أ(٢، ٥) ، ب(٠، ١) ، جـ(٤، ٢)

نواتج التعلّم

تعيين مساحة المثلث باستخدام الإحداثيات.



تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا الإجابة.

★ التحدّى

فى جراحة ترميم الحروق، يحتاج مريضٌ إلى ترقيع جلدىٍّ مثلث الشكل. ويرسم نظام تصوير جراحى حدودَ الجرح على شبكة إحداثية (الوحدة الواحدة = مليمتر واحد) برؤوس عند أ(−٢١، ٢١) وب(١، ٥) وجـ(−٢١، −٢١).

ولحصاد الكمّية الصحيحة من النسيج المانح، على الفريق الجراحى حساب المساحة المضبوطة للجرح المثلث. أوجد مساحة أبجـ.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٤ - ١٤
الرياضيات

المستقيم المارّ بنقطة ثابتة

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

نواتج التعلّم
تعيين المستقيم المارّ بنقطة ثابتة.

لاحظ!

خطوات حلّ المسائل التى فيها مستقيمات «تمرّ بنقطة ثابتة مهما كانت قيمة ك»:

❶ رتِّب معادلة المستقيم بالنسبة لـ ك وعامِلها متطابقةً فى ك.

❷ من المتطابقة فى ك، وهى (أس + بص + جـ)ك + (أ` س + ب` ص + جـ`) = ٠، كوِّن نظام معادلتين وحُلّه.

$$\left.\begin{array}{l} \text{أس} + \text{بص} + \text{جـ} = 0 \\ \text{أ`س} + \text{ب`ص} + \text{جـ`} = 0 \end{array}\right\}$$

استعِدّ

المستقيم (ك − ٤)س + (ك + ٢)ص + ك + ٥ = ٠ يمرّ بنقطة ثابتة مهما كانت قيمة ك. أوجد إحداثيَّى تلك النقطة.

طريقة الحلّ

بترتيب (ك − ٤)س + (ك + ٢)ص + ك + ٥ = ٠ بالنسبة لـ ك نحصل على:

(س + ص + ١)ك + (−٤س + ٢ص + ٥) = ٠

عامِلها متطابقةً فى ك.

وبما أنّ هذا يجب أن يتحقّق لكل قيم ك،

$$\left.\begin{array}{l} \text{س} + \text{ص} + 1 = 0 \\ -4\text{س} + 2\text{ص} + 5 = 0 \end{array}\right\}$$

وبحلّ هذا النظام نحصل على

$$\text{س} = \frac{1}{2}$$

و

$$\text{ص} = -\frac{3}{2}$$

إذن، النقطة الثابتة التى يمرّ بها المستقيم هى

$$\left(\frac{1}{2}\text{ ، }-\frac{3}{2}\right)$$

تعاون مع زميلك
تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا الإجابة.

حاوِل

المستقيم (٢ك + ١)س − (ك + ٢)ص + ٧ك + ٨ = ٠ يمرّ بنقطة ثابتة لكل قيم ك. أوجد إحداثيَّى هذه النقطة.

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ المستقيم (ك + ٢)س + كص − ٦ = ٠ يمرّ بنقطة ثابتة لكل قيم ك. أوجد إحداثيَّى هذه النقطة.

٢ المستقيم (ك + ٣)س − (٢ك + ١)ص + ك − ٢ = ٠ يمرّ بنقطة ثابتة لكل قيم ك. أوجد إحداثيَّى هذه النقطة.

٣ المستقيم (ك + ٣)س + (٣ك + ٢)ص + ٧ = ٠ يمرّ بنقطة ثابتة لكل قيم ك. أوجد إحداثيَّى هذه النقطة.

★ التحدِّى

المستقيم −(ك − ٢)س + (ك − ٣)ص = −٣ك + ٥ يمرّ بنقطة ثابتة لكل قيم ك. أوجد إحداثيَّى هذه النقطة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٤-١٥ شروط عدم تكوين مثلث

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

الرياضيات

لاحِظ!

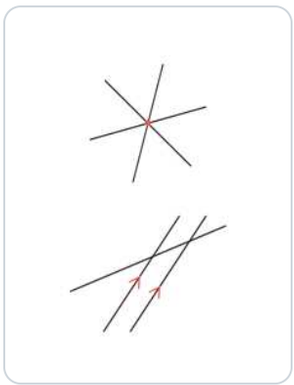
❗ هناك حالتان لشروط عدم تكوين ثلاثة مستقيمات لمثلث:

❶ مستقيمان متوازيان ⟸ ميلا المستقيمَين متساويان.

❷ ثلاثة مستقيمات تتقاطع فى نقطة واحدة ⟸ أوجد نقطة تقاطع مستقيمَين، وتحقّق من أنّ المستقيم الثالث يمرّ بتلك النقطة أيضًا.

نواتج التعلّم

اشتقاق شروط عدم تكوين المثلث وتفسيرها (وقوع النقاط على استقامة واحدة).



استعِدّ

إذا كانت المستقيمات الثلاثة س – ص + ١ = ٠ و٢س + ص + ٢ = ٠ وكس + ٣ص – ٤ = ٠ لا تكوّن مثلثًا، فأوجد قيمة الثابت ك.

طريقة الحلّ

أوّلًا، تحقّق من الشرط الذى يكون فيه مستقيمان من المستقيمات الثلاثة المعطاة متوازيَين.

بتحويل المستقيمات الثلاثة نحصل على:

ص = س + ١ ..... (١)

ص = –٢س – ٢ ..... (٢)

ص = $-\frac{ك}{٣}$س + $\frac{٤}{٣}$ ..... (٣)

حوِّل إلى صيغة ص = مس + ك لمعرفة الميول.

وبما أنّ (١) و(٢) غير متوازيَين، نتحقّق من حالتَى: (١) و(٣) متوازيان، و(٢) و(٣) متوازيان.

ميلا المستقيمَين متساويان.

(١) و(٣) متوازيان عندما: ١ = $-\frac{ك}{٣}$، أى ك = –٣

(٢) و(٣) متوازيان عندما: –٢ = $-\frac{ك}{٣}$، أى ك = ٦

ثانيًا، تحقّق من الشرط الذى تتقاطع فيه المستقيمات الثلاثة فى نقطة واحدة.

أوجد نقطة تقاطع المستقيمَين اللذين لا يحويان الثابت ك.

بحلّ (١) و(٢) آنيًّا، تكون نقطة التقاطع (–١، ٠)

المستقيم الباقى يمرّ بهذه النقطة.

وبما أنّ (٣) تمرّ بالنقطة (–١، ٠)، فإنّ ٠ = $-\frac{ك}{٣}$ × (–١) + $\frac{٤}{٣}$، أى ك = –٤

إذن، ك = –٤، ٣ ، ٦

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا الإجابة.

حاوِل

إذا كانت المستقيمات الثلاثة س – ٢ص + ٨ = ٠ و س + ص – ١ = ٠ وكس + ص – ٥ = ٠ لا تكوّن مثلثًا، فأوجد قيمة الثابت ك.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كانت المستقيمات الثلاثة س – ٢ص + ١ = ٠ و٣س + ٢ص = ٦ وك س – ٣ص + ٢ = ٠ لا تكوّن مثلثًا، فأوجد قيمة الثابت ك.

٢ إذا كانت المستقيمات الثلاثة س – ص = –١ و٣س + ٢ص = ١٢ وك س – ص = ك – ١ لا تكوّن مثلثًا، فأوجد قيمة الثابت ك.

★ التحدّى

إذا كانت المستقيمات الثلاثة س + ٢ص – ١ = ٠ و٣س + ص + ٢ = ٠ ومس + ٤ص – ٣ = ٠ لا تكوّن مثلثًا، فأوجد مجموع قيم م الممكنة جميعها.

تأمَّل

كيف يمكن الإفادة من تقاطع المستقيمات ومن المثلثات فى حلّ مسائل عملية (كالملاحة أو البناء أو التصميم)؟

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٤-١٦
الرياضيات

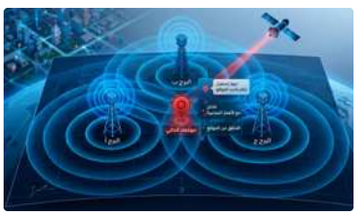
معادلة الدائرة (١)

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

نواتج التعلّم

اشتقاق صور معادلة الدائرة المختلفة واستخدامها، سواء أُعطى المركز ونصف القطر أم أُعطيت نقاط محدّدة.

المفهوم ٣ · الدوائر



تعتمد أنظمة تحديد المواقع العالمية (GPS) والشبكات الخلوية المحلّية اعتمادًا تامًّا على الهندسة الإحداثية للدوائر فى تحديد موقعك بدقّة. فحين يبحث هاتفك عن إشارة، يتّصل بعدّة أبراج خلوية ثابتة، ويقيس كلٌّ برج قوّةَ إشارة جهازك ويحسب نصف قطرٍ دقيقًا للمسافة، فيرسم حدًّا دائريًّا للموضع الذى يمكن أن تكون فيه.

والبرج الواحد يترك موقعك مبهمًا، لكن حين يرسم برجٌ ثانٍ وثالثٌ إشاراتِهما الدائرية المتداخلة، تحدّد الهندسة الإحداثية موضعك بالضبط. وتُعرَف هذه العملية الرياضية فى صناعة التقنية باسم **التثليث المسافى**. وخطأٌ رياضىٌّ يسيرٌ فى حساب هذه الحدود الدائرية يُربك كلّ شىء، من تطبيقات مشاركة الركوب الآلية إلى أنظمة تتبّع الاستجابة للطوارئ.

السؤال الموجِّه: كيف نستعمل الهندسة الإحداثية للدوائر فى نمذجة الحدود، وحساب المناطق المتداخلة، وتعيين نقاط التقاطع المضبوطة لإشارات الاتصال اللاسلكى فى أنظمة الاتصالات الحديثة؟

لاحِظ!

- معادلة الدائرة ذات المركز (أ، ب) ونصف القطر ر هى $(س - أ)^{٢} + (ص - ب)^{٢} = نق^{٢}$ **(الصورة المعيارية)**. وبصفة خاصة عندما يكون المركز هو نقطة الأصل: $س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}$.
  - يمكن أيضًا التعبير عن معادلة الدائرة على الصورة $س^{٢} + ص^{٢} + ل س + م ص + ن = ٠$ **(الصورة العامة)**.

الصورة الموسَّعة للصورة المعيارية.

- عندما يكون مركز الدائرة ونصف قطرها معلومَين، استخدم $(س - أ)^{٢} + (ص - ب)^{٢} = نق^{٢}$
- عندما تُحوَّل $س^{٢} + ص^{٢} + ل س + م ص + ن = ٠$ إلى الصورة $(س - أ)^{٢} + (ص - ب)^{٢} = ك$، فإذا كان $ك > ٠$ فهى تمثّل دائرة مركزها (أ، ب) ونصف قطرها $\sqrt{ك}$.

استعِدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معادلة الدائرة التى مركزها (٣، −٢) ونصف قطرها ٥

٢ حدّد نوع الشكل الذى تمثّله المعادلة $س^{٢} + ص^{٢} - ٦س + ٢ص + ٦ = ٠$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

طريقة الحلّ

١ بما أنّ المركز ونصف القطر معلومان، استخدم (س – أ)^{٢} + (ص – ب)^{٢} =نق^{٢}.

(س – ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٢٥

(س – ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٢٥

٢ حوِّل إلى الصورة (س – أ)^{٢} + (ص – ب)^{٢} = ك.

إذا كان ك > ٠ فهى دائرة مركزها (أ، ب) ونصف قطرها $\sqrt{ك}$.

س^{٢} + ص^{٢} – ٦س + ٢ص + ٦ = ٠

أكمل المربّع لكلٍّ من س وص.

(س – ٣)^{٢} – ٩ + (ص + ١)^{٢} – ١ + ٦ = ٠

وبتبسيطها نحصل على (س – ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٢^{٢}

إذن، الشكل المطلوب **دائرة مركزها (٣، –١) ونصف قطرها ٢**

عند تعيين دائرة، اذكر دائمًا مركزها ونصف قطرها.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقِشوا الإجابة.

حاوِل

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معادلات الدوائر الآتية.

(أ) المركز (–٣، ١) ونصف القطر ٢ **(ب)** المركز نقطة الأصل ونصف القطر ٤

٢ حدّد نوع الشكل الذى تمثّله المعادلة س^{٢} + ص^{٢} – ٤س – ٦ص + ٤ = ٠

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معادلات الدوائر الآتية.

(أ) المركز (٣، ٤) ونصف القطر ٦ **(ب)** المركز (–٢، ٦) ونصف القطر ٢$\sqrt{٣}$ **(ج)** المركز نقطة الأصل ونصف القطر ٥

٢ حدّد نوع الأشكال التى تمثّلها المعادلات الآتية.

(أ) س^{٢} + ص^{٢} – ٤س + ٨ص + ٤ = ٠ **(ب)** س^{٢} + ص^{٢} – ٤س = ٠

(ج) س^{٢} + ص^{٢} + ٢س – ٤ص – ٢٠ = ٠ **(د)** س^{٢} + ص^{٢} + ٤س – ٦ص = ٠

★ التحدّى

أوجد معادلة الدائرة المارّة بالنقطتين أ(٢، ٥) وب(٨، ١) بحيث يقع مركزها على المستقيم الذى معادلته س + ص = ٨

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٤-١٧ معادلة الدائرة (٢)

الرياضيات

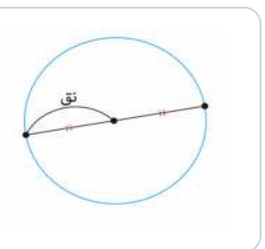
الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

لاحِظ!

- عندما يكون مركز الدائرة ونصف قطرها معلومَين، استخدم $(س - أ)^{٢} + (ص - ب)^{٢} = نق^{٢}$
- يمكن إيجاد **نصف قطر** الدائرة من **المسافة بين المركز ونقطة تقع على الدائرة**.
- **مركز** الدائرة المعلوم إحداثيًّا طرفَي قطرها هو **منتصف ذلك القطر**.
- عندما تكون ثلاث نقاط على الدائرة معلومة، استخدم $س^{٢} + ص^{٢} + ل س + م ص + ن = ٠$

نواتج التعلّم

اشتقاق صور معادلة الدائرة المختلفة واستخدامها، سواء أُعطي المركز ونصف القطر أم أُعطيت نقاط محدّدة.



استعِدّ

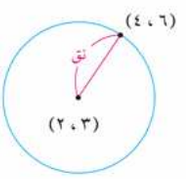
أوجد معادلات الدوائر الآتية.

١ دائرة مركزها (٢، ٣) وتمرّ بالنقطة (٦، ٤)

٢ دائرة النقطتان أ(١، ٣) وب(٣، –٥) طرفا قطرٍ فيها

٣ دائرة تمرّ بالنقاط الثلاث (١، ١) و(٢، –١) و(٣، ٢)

طريقة الحلّ



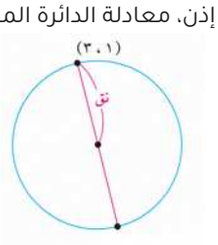
١ بما أنّ مركز الدائرة معلوم، استخدم $(س - أ)^{٢} + (ص - ب)^{٢} = نق^{٢}$

نصف قطر الدائرة هو المسافة بين المركز ونقطة تقع على الدائرة.

أوجد نصف قطر هذه الدائرة.

$$\sqrt{١٣} = \sqrt{(٦ - ٣)^{٢} + (٤ - ٢)^{٢}}$$

إذن، معادلة الدائرة المطلوبة هي $(س - ٢)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ١٣$



٢ بما أنّ مركز الدائرة التي النقطتان أ(١، ٣) وب(٣، –٥) طرفا قطرٍ فيها هو منتصف أب،

المركز هو منتصف القطر.

$$(٢ ، ١-) = \left(\frac{٣ + ١}{٢} ، \frac{(٥-) + ٣}{٢}\right)$$

وبما أنّ هذه الدائرة تمرّ بالنقطة أ، فإنّ نصف قطرها:

نصف قطر الدائرة هو المسافة بين المركز ونقطة تقع على الدائرة.

$$\sqrt{١٧} = \sqrt{(٣ - ١-)^{٢} + (١ - ٢)^{٢}}$$

إذن، معادلة الدائرة المطلوبة هي $(س - ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ١٧$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٣ بما أنّ ثلاث نقاط على الدائرة معلومة، استخدم س^{٢} + ص^{٢} + لس + مص + ن = ٠

بما أنّها تمرّ بالنقطة (١، ١): ١^{٢} + ١^{٢} + ل × ١ + م × ١ + ن = ٠

وبتبسيطها نحصل على ل + م + ن + ٢ = ٠ ..... (١)

وبما أنّها تمرّ بالنقطة (٢، –١): ٢^{٢} + (–١)^{٢} + ل × ٢ + م × (–١) + ن = ٠

وبتبسيطها نحصل على ٢ل – م + ن + ٥ = ٠ ..... (٢)

وبما أنّها تمرّ بالنقطة (٣، ٢): ٣^{٢} + ٢^{٢} + ل × ٣ + م × ٢ + ن = ٠

وبتبسيطها نحصل على ٣ل + ٢م + ن + ١٣ = ٠ ..... (٣)

وبحلّ (١) و(٢) و(٣) آنيًّا نحصل على ل = –٥ وم = –١ ون = ٤

إذن، معادلة الدائرة المطلوبة هى س^{٢} + ص^{٢} – ٥س – ص + ٤ = ٠

عوِّض بالنقاط الثلاث الواقعة على الدائرة لتكوين نظام معادلات.

ما لم تُحدَّد صورةٌ بعينها، يمكنك تركها على هذه الصورة.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٣ ثم ناقِشوا الإجابة.

حاوِل

أوجد معادلات الدوائر الآتية.

١ دائرة مركزها (–٣، ١) وتمرّ بالنقطة (٤، –٢)

٢ دائرة النقطتان (٣، ٤) و(٥، –٢) طرفا قطرٍ فيها

٣ دائرة تمرّ بالنقاط الثلاث (٠، ١) و(–١، ٢) و(٣، ١)

تدرَّب

أوجد معادلات الدوائر الآتية.

١ دائرة مركزها (١، –٣) وتمرّ بالنقطة (–٣، ٠)

٢ دائرة مركزها (–٤، ١) وتمرّ بالنقطة (٣، –٢)

٣ دائرة مركزها (٢، –١) وتمرّ بنقطة الأصل

٤ دائرة مركزها نقطة الأصل وتمرّ بالنقطة (٤، –٣)

٥ دائرة النقطتان (٤، ٧) و(–٢، –١) طرفا قطرٍ فيها

٦ دائرة النقطتان (٤، –٢) و(–٦، –٢) طرفا قطرٍ فيها

٧ دائرة النقطتان (–٣، ٠) و(–١، ٢) طرفا قطرٍ فيها

٨ دائرة النقطتان (–٣، ٦) و(٣، –٢) طرفا قطرٍ فيها

٩ دائرة تمرّ بالنقاط الثلاث (٠، ٠) و(–١، ١) و(٢، ٤)

١٠ دائرة تمرّ بالنقاط الثلاث (–٤، ٦) و(٠، ٨) و(٣، –١)

١١ دائرة تمرّ بالنقاط الثلاث (١، ١) و(٥، –١) و(–٣، –٧)

★ التحدِّى

أثناء دراسة الفسيولوجيا الكهربية للقلب، يرسم أطبّاء القلب خريطةً للنشاط الكهربى لأُذَين المريض لتحديد نقطة منشأ اضطراب النظم القلبى. وتنتشر جبهة الموجة للشذوذ الكهربى إلى الخارج فى دائرة تامّة.

ويرصد قِطارُ رسم الخرائط مرورَ الموجة الكهربية عبر ثلاثة إحداثيات مجسّات محدّدة على شبكة تشخيصية:

المجس ١: (٢، ٠)　　المجس ٢: (٠، ٢)　　المجس ٣: (٤، ٦)

أوجد المعادلة الرياضية للدائرة التى تكوّنها هذه الموجة الكهربية لتعيين مركزها (بؤرة اضطراب النظم) ونصف قطرها.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٤-١٨
الرياضيات

معادلة الدائرة (٣)

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

لاحظ!

- عند إيجاد معادلة دائرة تمسّ أحد المحورين، ارسم دائمًا شكلًا توضيحيًّا للتصوّر.
- يمكن إيجاد نصف قطر الدائرة التى تمسّ محور س أو محور ص من **المسافة بين المركز ونقطة التماس**.

نواتج التعلّم

اشتقاق صور معادلة الدائرة المختلفة واستخدامها، سواء أُعطى المركز ونصف القطر أم أُعطيت نقاط محدّدة.

استعِدّ

أوجد معادلات الدوائر الآتية.

١ دائرة مركزها (٤، −٢) وتمسّ محور س

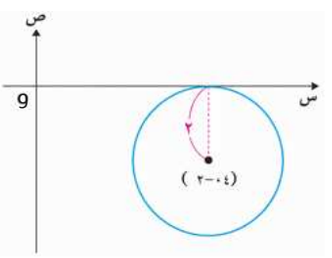
٢ دائرة تمرّ بالنقطة (−٢، ١) وتمسّ محورَى س وص معًا

٣ دائرة يقع مركزها على المستقيم ص = −س وتمرّ بالنقطتين (٥، ٢) و(−٢، ٣)

طريقة الحلّ

١ بما أنّ مركز الدائرة معلوم، استخدم (س − أ)^{٢} + (ص − ب)^{٢} = نق^{٢}

أوجد نصف قطر هذه الدائرة برسم شكل توضيحى.



المسافة بين المركز ونقطة التماس.

من الشكل المقابل، نصف قطر هذه الدائرة يساوى ٢

إذن، معادلة الدائرة المطلوبة هى (س − ٤)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٤

٢ ارسم شكلًا يحقّق الشروط المعطاة.

ليكن نصف قطر الدائرة المطلوبة نق حيث نق > ٠. من الشكل المقابل، إحداثيا المركز هما (−نق، نق).

نصف القطر هو المسافة بين المركز ونقطة تقع على الدائرة.

ثم لإيجاد نصف القطر، كوِّن معادلةً فى نصف القطر.

وبما أنّ هذه الدائرة تمرّ بالنقطة (−٢، ١):

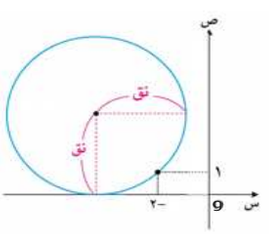
رتِّب الطرفين.

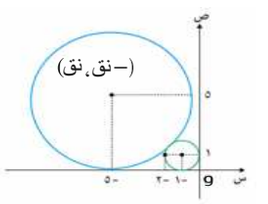
$\sqrt{(-٢+نق)^{٢}+(١-نق)^{٢}}$ = نق

(−٢ + نق)^{٢} + (١ − نق)^{٢} = نق^{٢}

وبتبسيطها نحصل على نق^{٢} − ٦ نق + ٥ = ٠

وبحلّها نحصل على نق = ١، ٥

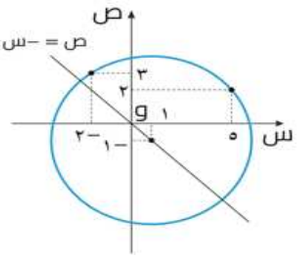




وبملاحظة أنّ نق > ٠، تكون معادلتا الدائرتين المطلوبتين:

(س + ١)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ١ ، (س + ٥)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ٢٥

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي



٣ بما أنّ المركز يقع على المستقيم ص = –س، يمكن وضع إحداثيَّى مركز الدائرة المطلوبة على الصورة (أ، –أ).

كوِّن معادلةً فى نصف القطر.

وليكن نصف القطر نق حيث نق > ٠. وبما أنّ هذه الدائرة تمرّ بالنقطة (٥، ٢):

$$\text{نق} = \sqrt{(٥ - \text{أ})^{٢} + (٢ + \text{أ})^{٢}}$$

$$(٥ - \text{أ})^{٢} + (٢ + \text{أ})^{٢} = \text{نق}^{٢} \quad \ldots\ldots (١)$$

وبما أنّها تمرّ أيضًا بالنقطة (–٢، ٣):

$$\text{ر} = \sqrt{(-٢ - \text{أ})^{٢} + (٣ + \text{أ})^{٢}}$$

$$(-٢ - \text{أ})^{٢} + (٣ + \text{أ})^{٢} = \text{نق}^{٢} \quad \ldots\ldots (٢)$$

بما أنّنا نوجد معادلة دائرة، يكفينا إيجاد نق^{٢}.

وبحلّ (١) و(٢) آنيًّا نحصل على أ = ١ ونق^{٢} = ٢٥

إذن، معادلة الدائرة المطلوبة هى $(\text{س} - ١)^{٢} + (\text{ص} + ١)^{٢} = ٢٥$

حاوِل

أوجد معادلات الدوائر الآتية.

١ دائرة مركزها (–٢، ٣) وتمسّ محور ص

٢ دائرة تمرّ بالنقطة (١، ٢) وتمسّ محورَى س وص معًا

٣ دائرة يقع مركزها على المستقيم ص = س + ٥ وتمرّ بنقطة الأصل وبالنقطة (١، ٢)

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٣ ثم ناقِشوا الإجابة.

★ التحدّى

يدور حاملُ جهاز العلاج الإشعاعى القوسى فى مسار دائرى، ومركز دورانه مقيَّدٌ بالحركة على محور س. ويجب أن يقطع المسارُ نقطتَى معايرة مكانيَّتَين هما ن$_{١}$(–٢، ٢) و ن$_{٢}$(١، ١). أوجد معادلة الدائرة على الصورة المعيارية، ومركز دورانها، ونصف قطر الحزمة بالضبط.

تدرَّب

أوجد معادلات الدوائر الآتية.

١ دائرة مركزها (–١، ٤) وتمسّ محور س

٢ دائرة مركزها (٣، –٤) وتمسّ محور س

٣ دائرة مركزها (٥، –٤) وتمسّ محور س

٤ دائرة مركزها (–١، ٦) وتمسّ محور ص

٥ دائرة مركزها (٢، –٥) وتمسّ محور ص

٦ دائرة مركزها (–٣، –٤) وتمسّ محور ص

٧ دائرة تمرّ بالنقطة (–١، –٢) وتمسّ محورَى س وص معًا

٨ دائرة تمرّ بالنقطة (–٢، –١) وتمسّ محورَى س وص معًا

٩ دائرة تمرّ بالنقطة (٨، –١) وتمسّ محورَى س وص معًا

١٠ دائرة يقع مركزها على المستقيم ص = س + ١ وتمرّ بالنقطتين (٣، ٤) و (١، ٤)

١١ دائرة يقع مركزها على المستقيم ص = ٢س – ٦ وتمرّ بالنقطتين (٣، ٧) و (–١، ٣)

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٤-١٩
الرياضيات

شروط تكوين الدائرة

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

نواتج التعلّم

تحديد الشروط اللازمة لتكوين معادلة الدائرة.

لاحِظ!

عندما تُحوَّل المعادلة س^{٢} + ص^{٢} + لس + مص + ن = ٠ إلى الصورة (س – أ)^{٢} + (ص – ب)^{٢} = (ثابت)، فإذا كان **(الثابت) > ٠** فإنّ هذه المعادلة تمثّل دائرة.

استعِدّ

أوجد مجموعة قيم الثابت ك بحيث تمثّل المعادلة س^{٢} + ص^{٢} – ٢كس + ٢كص + ٤ك + ٦ = ٠ دائرة.

طريقة الحلّ

بتحويل س^{٢} + ص^{٢} – ٢كس + ٢كص + ٤ك + ٦ = ٠ نحصل على:

حوِّل إلى الصورة (س – أ)^{٢} + (ص – ب)^{٢} = (ثابت).

(س – ك)^{٢} – ك^{٢} + (ص + ك)^{٢} – ك^{٢} + ٤ك + ٦ = ٠

وبتبسيطها نحصل على:

(س – ك)^{٢} + (ص + ك)^{٢} = ٢ك^{٢} – ٤ك – ٦

إذا كان (الثابت) > ٠ فهي دائرة.

وتمثّل هذه المعادلة دائرةً عندما ٢ك^{٢} – ٤ك – ٦ > ٠

وبحلّها نحصل على ك < –١ **أو** ك > ٣

حاوِل

أوجد مجموعة قيم الثابت ك بحيث تمثّل المعادلة س^{٢} + ص^{٢} + ٢كس – ٤كص + ٤ك^{٢} + ٦ = ٠ دائرة.

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد مجموعة قيم الثابت ك بحيث تمثّل المعادلة س^{٢} + ص^{٢} + ٢س – ص + ك = ٠ دائرة.

٢ أوجد مجموعة قيم الثابت ك بحيث تمثّل المعادلة
س^{٢} + ص^{٢} + ٦كس – ٢كص + ٢٨ك + ٦ = ٠ دائرة.

٣ أوجد مجموعة قيم الثابت ك بحيث تمثّل المعادلة
س^{٢} + ص^{٢} + ٢كس – ٢(ك + ٣)ص + ٤ك^{٢} + ١ = ٠ دائرة.

★ التحدّي

يولّد لحّامٌ فوق-صوتيٌّ آليٌّ حدًّا للإجهاد الصوتي تمثّله المعادلة:
س^{٢} + ص^{٢} + ٦س – ٢كص + ٢ك^{٢} – ٤ك + ٩ = ٠
ولوجود حدٍّ دائريٍّ حقيقيٍّ مستقرٍّ للأمان حول الآلة، يجب أن يكون نصف قطر هذه المعادلة عددًا حقيقيًّا موجبًا. أوجد بالضبط مجموعة قيم ثابت ضبط القدرة ك التي تضمن أن تمثّل هذه المعادلة دائرةً حقيقية.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٤-٢٠٠
الرياضيات

نقاط تقاطع الدائرة والمستقيم (١)

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

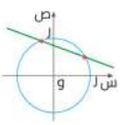
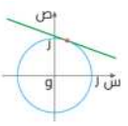
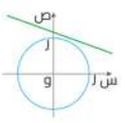
نواتج التعلّم

حساب نقاط التقاطع بين الدائرة والمستقيم.

لاحِظ!

عند إيجاد إحداثيات نقاط التقاطع بين دائرة ومستقيم أو عددِها، **حلّ معادلتَى الدائرة والمستقيم آنيًّا**.

- عند إيجاد **الإحداثيات**، أوجد حلول المعادلتين الآنيّتين.
- عند إيجاد **عدد النقاط**، كوِّن معادلةً تربيعية وتحقّق من إشارة المميِّز ف.

إشارة ف	ف > ٠	ف = ٠	ف < ٠
عدد نقاط التقاطع	نقطتان	نقطة واحدة	لا توجد نقاط
العلاقة الموضعية بين الدائرة والمستقيم			
	يتقاطعان فى نقطتين مختلفتين	يتماسّان	لا توجد نقاط تقاطع

استعِدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد إحداثيَّى نقطتَى تقاطع الدائرة $(س + ٢)^{٢} + ص^{٢} = ١٠$ والمستقيم $ص = -٢س + ١$

٢ أوجد عدد نقاط تقاطع الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} = ٢$ والمستقيم $س - ص + ٣ = ٠$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

طريقة الحلّ

١ حلّ معادلتَى الدائرة والمستقيم آنيًّا.

$$\left.\begin{array}{l}(س + ٢)^{٢} + ص^{٢} = ١٠ \quad \ldots\ldots (١)\\ ص = -٢س + ١ \quad \ldots\ldots (٢)\end{array}\right\}$$

وبالتعويض بـ(٢) فى (١) وتبسيطها نحصل على:

$$٥س^{٢} - ٥ = ٠$$

عوِّض فى المعادلة الخطّية.

وبحلّها نحصل على $س = \pm ١$

ومن (٢): عندما $س = ١$ يكون $ص = -١$، وعندما $س = -١$ يكون $ص = ٣$

إذن، إحداثيا النقطتين المطلوبتين هما $(١، -١)$، $(-١، ٣)$

٢ حلّ معادلتَى الدائرة والمستقيم آنيًّا.

$$\left.\begin{array}{l}س^{٢} + ص^{٢} = ٢ \quad \ldots\ldots (١)\\ س - ص + ٣ = ٠ \quad \ldots\ldots (٢)\end{array}\right\}$$

من (٢): $ص = س + ٣ \quad \ldots\ldots (٢)'$

وبالتعويض بـ(٢)′ فى (١) وتبسيطها نحصل على:

$$٢س^{٢} + ٦س + ٧ = ٠$$

وليكن مميِّز هذه المعادلة ف:

$$ف = ٦^{٢} - ٤ \times ٢ \times ٧ = -٢٠ < ٠$$

إذن، عدد نقاط التقاطع **صفر**

حاوِل

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد إحداثيَّى نقطتَى تقاطع الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} = ٤$ والمستقيم $س + ص = ٢$

٢ أوجد عدد نقاط تقاطع الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} = ١٠$ والمستقيم $ص = ٢س - ٥$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقِشوا الإجابة.

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد إحداثيات نقاط التقاطع للدوائر والمستقيمات الآتية.

(أ) $س^{٢} + ص^{٢} = ١٠$ ، $ص = ٣س - ١٠$

(ب) $س^{٢} + ص^{٢} = ٥$ ، $٢س - ص + ٥ = ٠$

(جـ) $(س - ١)^{٢} + ص^{٢} = ١٠$ ، $س + ٣ص - ١ = ٠$

٢ أوجد عدد نقاط التقاطع للدوائر والمستقيمات الآتية.

(أ) $س^{٢} + ص^{٢} = ٥$ ، $ص = س + ٢$

(ب) $س^{٢} + ص^{٢} = ٢$ ، $٢س + ٣ص - ٦ = ٠$

(جـ) $(س + ١)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٥$ ، $س + ٢ص + ٢ = ٠$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٤-٢١
الرياضيات

نقاط تقاطع الدائرة والمستقيم (٢)

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

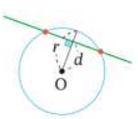
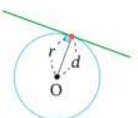
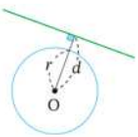
نواتج التعلّم
حساب نقاط التقاطع بين الدائرة والمستقيم.

لاحِظ!

كيف تُحلّ المسائل التى تكون فيها العلاقة الموضعية بين الدائرة والمستقيم شرطًا:

• إذا كانت **معادلة المستقيم مجهولة**، استخدم المميِّز بناءً على العلاقة الموضعية:
يتقاطعان فى نقطتين مختلفتين ⟸ ف > ٠ ، يتماسّان ⟸ ف = ٠ ، لا توجد نقاط تقاطع ⟸ ف < ٠

• إذا كان **نصف قطر الدائرة مجهولًا**، استخدم علاقة المقارنة بين (نصف القطر نق) و(المسافة د بين مركز الدائرة والمستقيم) بناءً على العلاقة الموضعية.

العلاقة الموضعية بين الدائرة والمستقيم			
	يتقاطعان فى نقطتين مختلفتين	يتماسّان	لا توجد نقاط تقاطع
علاقة المقارنة بين ر و د	نق < د	نق = د	نق > د

استعِدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كانت الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٥ والمستقيم ص = ٢س – ك يتقاطعان فى نقطتين مختلفتين، فأوجد مجموعة قيم الثابت ك.

٢ إذا كانت الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢} والمستقيم ٢س + ص – ٥ = ٠ يتماسّان، فأوجد قيمة نصف قطر الدائرة نق.

طريقة الحلّ

١ بما أنّ معادلة المستقيم مجهولة، حلّ معادلتَى الدائرة والمستقيم آنيًّا واستخدم المميِّز.

٥س^{٢} – ٤كس + ك^{٢} – ٥ = ٠

وليكن مميِّز هذه المعادلة ف،

ف = (–٤ك)^{٢} – ٤ × ٥ × (ك^{٢} – ٥)

= –٤ك^{٢} + ١٠٠ > ٠

عندما يتقاطعان فى نقطتين مختلفتين يكون ف > ٠ .

وبحلّها نحصل على –٥ < ك < ٥

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢ بما أنّ نصف قطر الدائرة مجهول، أوجد المسافة د بين مركز الدائرة (٠، ٠) والمستقيم.

$$د = \frac{|٢ \times ٠ + ١ \times ٠ - ٥|}{\sqrt{٢^{٢} + ١^{٢}}}$$

$$= \frac{|-٥|}{\sqrt{٥}}$$

$$= \sqrt{٥}$$

إذن، نق = $\sqrt{٥}$

عندما يتماسّان يكون نق = د.

حاوِل

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كانت الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٤ والمستقيم ص = م س + ٤ يتماسّان، فأوجد قيمة الثابت م.

٢ إذا كانت الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢} والمستقيم س – ٣ص – ١٠ = ٠ ليس بينهما نقاط تقاطع، فأوجد مجموعة قيم نصف قطر الدائرة نق.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقِشوا الإجابة.

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كانت الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٨ والمستقيم ص = س + م يتماسّان، فأوجد قيمة الثابت م.

٢ إذا كانت الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ١٠ والمستقيم ص = ٣س + ن ليس بينهما نقاط تقاطع، فأوجد مجموعة قيم الثابت ن.

٣ إذا كان للدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٥ والمستقيم ص = ٢س + م نقاط تقاطع، فأوجد مجموعة قيم الثابت م.

٤ إذا كانت الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢} والمستقيم ص = س + ٢ يتماسّان، فأوجد قيمة نصف قطر الدائرة نق.

٥ إذا كانت الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢} والمستقيم ٤س – ص + ١٧ = ٠ يتقاطعان فى نقطتين مختلفتين، فأوجد مجموعة قيم نصف قطر الدائرة نق.

★ التحدِّى

ترسم محطّة رادار ساحلية نطاق تغطيتها منطقةً دائرية مركزها نقطة الأصل: س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}

ويسير ممرٌّ ملاحيٌّ دوليٌّ مستقيم وفق المعادلة الخطّية: ٣س + ٤ص – ١٠ = ٠

ولمراعاة قوانين الخصوصية البحرية، يجب أن تبقى إشارة الرادار بعيدةً تمامًا عن الممرّ الملاحى، فلا توجد بينهما نقاط تقاطع. وبما أنّ نصف القطر مسافةٌ فيزيائية موجبة(نق> ٠)، أوجد بالضبط مجموعة قيم نصف القطر نق التى تحقّق هذا الفصل.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٤-٢٢
الرياضيات

طول الوتر

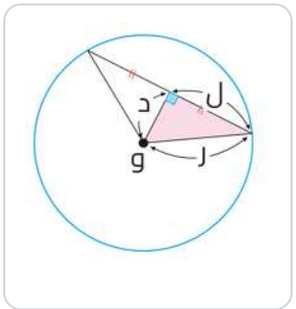
الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

لاحظ!

فى المسائل التى تتطلّب إيجاد طول الوتر، ارسم أوّلًا شكلًا توضيحيًّا واستخدم **نظرية فيثاغورس**. لتكن نق نصف قطر الدائرة، ود طول العمود المرسوم من مركز الدائرة على الوتر، و ل نصف طول الوتر. وبما أنّ العمود المرسوم من مركز الدائرة على الوتر ينصّفه، يكون نق^{٢} = د^{٢} + ل^{٢}.

نواتج التعلّم

حساب طول الوتر المشترك الناتج من تقاطع الدائرة والمستقيم.



استعِدّ

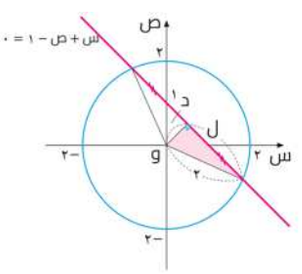
حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد طول الوتر الذى تقطعه الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٤ على المستقيم س + ص − ١ = ٠

٢ أوجد قيمة الثابت ك بحيث يكون طول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتَى تقاطع الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٣ والمستقيم س − ص + ك = ٠ يساوى ٢

طريقة الحلّ

١ بما أنّها مسألة إيجاد طول وتر، ارسم أوّلًا شكلًا توضيحيًّا للتصوّر.



ليكن د طول العمود المرسوم من مركز الدائرة (٠، ٠) على المستقيم س + ص − ١ = ٠:

$$د = \frac{|١ \times ٠ + ١ \times ٠ - ١|}{\sqrt{١^{٢} + ١^{٢}}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

وليكن ل نصفَ طول الوتر المطلوب. وبما أنّ نصف قطر الدائرة ٢،

فمن نظرية فيثاغورس:

ل^{٢} = ٢^{٢} − د^{٢}

$$ل^{٢} = ٤ - \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$$

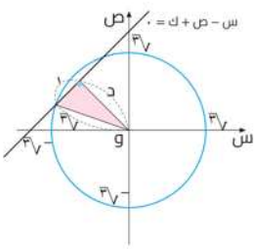
$$ل^{٢} = \frac{٧}{٢}\text{ ، ومن ل} > ٠ \text{ يكون ل} = \frac{\sqrt{١٤}}{٢}$$

إذن، طول الوتر المطلوب هو ٢ل = $\sqrt{١٤}$

طول العمود هو المسافة بين النقطة والمستقيم.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٢ بما أنّ القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتَى تقاطع الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٣ والمستقيم س − ص + ك = ٠ تكوّن وترًا، ارسم شكلًا توضيحيًّا للتصوّر.



ليكن د طول العمود المرسوم من مركز الدائرة (٠، ٠) على المستقيم س − ص + ك = ٠ :

$$د = \frac{|١ \times ٠ + (-١) \times ٠ + ك|}{\sqrt{١^{٢} + (-١)^{٢}}}$$

$$د = \frac{|ك|}{\sqrt{٣}} \quad \ldots\ldots (١)$$

وأيضًا، بما أنّ نصف طول الوتر ١ ونصف قطر الدائرة $\sqrt{٣}$، فمن نظرية فيثاغورس:

$$د^{٢} = (\sqrt{٣})^{٢} - ١^{٢}$$

$$د^{٢} = ٢ \text{، ومن } د > ٠ \text{ يكون } د = \sqrt{٢} \quad \ldots\ldots (٢)$$

من (١) و(٢): $\frac{|ك|}{\sqrt{٣}} = \sqrt{٣}$

$|ك| = ٢$

عند إزالة علامة القيمة المطلقة، أضِف ±.

إذن، ك = ±٢

حاوِل

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد طول الوتر الذى تقطعه الدائرة (س − ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٩ على المستقيم س + ٢ص − ٥ = ٠

٢ أوجد قيمة الثابت ك بحيث يكون طول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتَى تقاطع الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ١٦ والمستقيم ص = س + ك يساوى $\sqrt{٢}$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقِشوا الإجابة.

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد طول الوتر الذى تقطعه الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ١٠ على المستقيم ٢س − ص = ٥

٢ أوجد طول الوتر الذى تقطعه الدائرة (س − ٢)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ٥ على المستقيم س + ص = ٤

٣ أوجد طول الوتر الذى تقطعه الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٣ على المستقيم س − ص = ٢

٤ أوجد قيمة الثابت ك بحيث يكون طول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتَى تقاطع الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ١٠ والمستقيم ص = س + ك يساوى $٤\sqrt{٢}$

٥ أوجد قيمة الثابت ك بحيث يكون طول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتَى تقاطع الدائرة (س − ١)^{٢} + ص^{٢} = ٥ والمستقيم ص = س + ك يساوى $٣\sqrt{٢}$

★ التحدّى

أوجد قيمة الثابت ك بحيث يكون طول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتَى تقاطع الدائرة س^{٢} + ص^{٢} + ٤س − ٢ص − ٧ = ٠ والمستقيم ص = س + ك يساوى ٤

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٤-٢٣ المماسّ للدائرة

الرياضيات

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

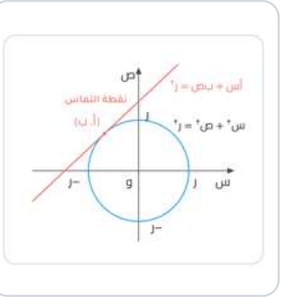
نواتج التعلّم

اشتقاق معادلة المماسّ للدائرة.

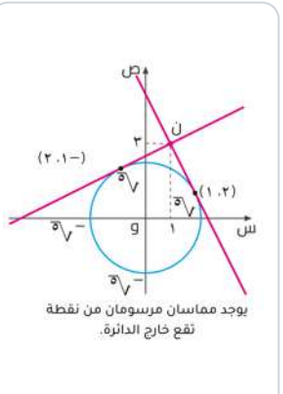
لاحِظ!

- معادلة المماسّ للدائرة س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢} عند النقطة (أ، ب) الواقعة عليها هى: أس + بص = نق^{٢}
- لإيجاد معادلة المماسّ المرسوم من نقطة لا تقع على الدائرة، اعتبِر إحداثيَّى **نقطة التماسّ** (أ، ب).

عندما تنصّ المسألة على «عند ~».



عندما تنصّ المسألة على «عند نقطة معطاة».



يوجد مماسان مرسومان من نقطة تقع خارج الدائرة.

استعِدّ

أوجد معادلات المماسّات الآتية.

١ المماسّ للدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ عند النقطة (٤، ٣)

٢ المماسّ المرسوم من النقطة ف(١، ٣) إلى الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٥

طريقة الحلّ

١ بما أنّ نقطة التماسّ هى (٤، ٣)،

٤س + ٣ص = ٢٥

٢ ليكن إحداثيا نقطة التماسّ (أ، ب)

معادلة المماسّ هى أس + بص = ٥

وبما أنّه يمرّ بالنقطة ف(١، ٣)، فإنّ أ + ٣ب = ٥ ..... (١)

وأيضًا، بما أنّ نقطة التماسّ تقع على س^{٢} + ص^{٢} = ٥، فإنّ أ^{٢} + ب^{٢} = ٥ ..... (٢)

حلّ (١) و(٢) آنيًّا.

من (١): أ = –٣ب + ٥ ..... (١)′

وبالتعويض بـ(١)′ فى (٢) نحصل على (–٣ب + ٥)^{٢} + ب^{٢} = ٥

وبحلّها نحصل على ب = ١، ٢

وبالتعويض فى (١)′: عندما ب = ١ يكون أ = ٢، وعندما ب = ٢ يكون أ = –١

إذن، بما أنّ نقطة التماسّ هى (٢، ١) أو (–١، ٢)، تكون معادلتا المماسَّين المطلوبتين ٢س + ص = ٥ و

–س + ٢ص = ٥

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاوِل

أوجد معادلات المماسّات الآتية.

١ المماسّ للدائرة $س^{٢} + ص^{٢} = ٣٤$ عند النقطة (٥، ٣)

٢ المماسّ المرسوم من النقطة (−٢، ٤) إلى الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} = ١٠$

تدرَّب

أوجد معادلات المماسّات الآتية.

١ المماسّ للدائرة $س^{٢} + ص^{٢} = ١٠$ عند النقطة (٣، −١)

٢ المماسّ للدائرة $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٩$ عند النقطة (−٥، −٢)

٣ المماسّ للدائرة $س^{٢} + ص^{٢} = ٥$ عند النقطة (−٢، ١)

٤ المماسّ المرسوم من النقطة (−١، ٣) إلى الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} = ٥$

٥ المماسّ المرسوم من النقطة (٢، ١) إلى الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} = ١$

٦ المماسّ المرسوم من النقطة (٢، ٦) إلى الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٠$

★ التحدّى

طائرةٌ مسيَّرةٌ ذاتية القيادة للتوصيل تتنقّل فى ساحةٍ صناعية. وفى الساحة خزّانٌ دائرىٌّ للجهد العالى مركزه نقطة الأصل، ومنطقةُ الخطر حوله تمثّلها المعادلة: $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٠$

وتحوم الطائرة الآن عند نقطة تمركزٍ إحداثياها ف(٦، ٢). ولتفحص المحيط بأمان دون دخول منطقة الخطر، عليها أن توجّه مستشعراتها البصرية على مسارٍ مماسٍّ للدائرة تمامًا من موضعها الحالى.

أوجد معادلتَى خطَّى النظر المماسَّين المتاحين للطائرة، وحدِّد بالضبط إحداثيَّى النقطتين اللتين يلامسان عندهما حدَّ منطقة الخطر.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٤-٢٤
الرياضيات

العلاقة الوضعية بين دائرتين

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

نواتج التعلّم

تحديد العلاقة الوضعية بين دائرتين: منفصلتين، أو متماسّتين، أو متقاطعتين.

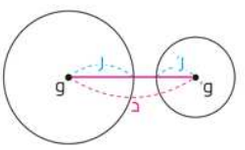
لاحِظ!

العلاقة الوضعية بين دائرتين **(مراجعة الرياضيات أ)**

لتكن نق نصف قطر الدائرة م، و نق` نصف قطر الدائرة م` حيث نق > نق`، د المسافة بين مركزَيهما. العلاقة الوضعية بين الدائرتين والعلاقة بين نق ونق` ود هى كالآتى:

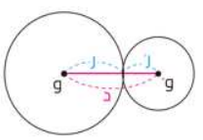
خارجيتان عن بعضهما

نق + نق` < د



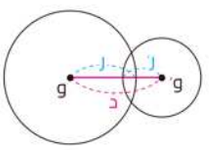
تتماسّان خارجيًّا

نق + نق` = د



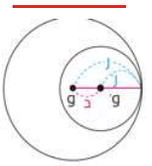
تتقاطعان عند نقطتين

نق – نق` < د < نق + نق`



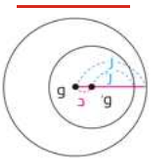
تتماسّان داخليًّا

نق – نق` = د



إحداهما داخل الأخرى

نق – نق` < د



استعِدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ اذكر العلاقة الوضعية بين الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٤ والدائرة (س – ٤)^{٢} + ص^{٢} = ٩

٢ أوجد معادلة الدائرة التى مركزها (٣، ١) وتمسّ الدائرة (س – ١)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٥ داخليًّا.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

طريقة الحلّ

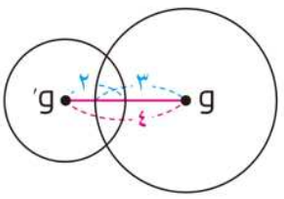
١ بما أنّ مركزَى الدائرتين هما (٠، ٠) و(٤، ٠)،

$$د = \sqrt{(٤ - ٠)^{٢} + (٠ - ٠)^{٢}} = ٤$$

وبما أنّ نصفَى قطرَى الدائرتين ٢ و٣ على الترتيب،

فمن ٣ − ٢ < ٤ < ٣ + ٢

نق − نق′ < د < نق + نق′



إذن، الدائرتان **تتقاطعان عند نقطتين**

٢ بما أنّ مركز الدائرة $(س - ١)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٥$ هو (١، −٣)،

$$د = \sqrt{(-٣ - ١)^{٢} + \{١ - (-٣)\}^{٢}} = ٢\sqrt{٥}$$

وبما أنّ الدائرتين تتماسّان داخليًّا، فإنّ نق − نق′ = د.

ونصف قطر الدائرة $(س - ١)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٥$ هو $\sqrt{٥}$.

وبما أنّ $\sqrt{٥} < د$ يكون نق′ = $\sqrt{٥}$

إذن، نق − $\sqrt{٥}$ = $٢\sqrt{٥}$

نق = $٣\sqrt{٥}$

إذن، معادلة الدائرة المطلوبة هى $(س - ٣)^{٢} + (ص - ١)^{٢} = ٤٥$

حاوِل

حلّ المسائل الآتية.

١ اختر العلاقة الوضعية للدائرتين الآتيتين من **أ** إلى **هـ** وأجِب بالحرف.

(أ) الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} = ٩$ والدائرة $(س - ٣)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ٤$

(ب) الدائرة $(س - ١)^{٢} + ص^{٢} = ٥٢$ والدائرة $س^{٢} + ص^{٢} + ٢س - ٦ص = ٣$

أ. متباعدتان **ب.** تتماسّان خارجيًّا **جـ.** تتماسّان داخليًّا

د. إحداهما داخل الأخرى **هـ.** تتقاطعان عند نقطتين

٢ أوجد معادلة الدائرة التى مركزها (−٣، −٩) وتمسّ الدائرة $(س + ٦)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ١$ خارجيًّا.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال **٢** ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ اختر العلاقة الوضعية للدائرتين الآتيتين من **أ** إلى **هـ**، وأجِب بالحرف.

(أ) الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} = ٤$ والدائرة $(س - ١)^{٢} + ص^{٢} = ١$

(ب) الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} = ١٨$ والدائرة $(س + ٢)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٢$

(جـ) الدائرة $(س + ٣)^{٢} + ص^{٢} = ١٦$ والدائرة $س^{٢} + ص^{٢} - ٢س - ٨ص - ٨ = ٠$

(د) الدائرة $س^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ٤٥$ والدائرة $س^{٢} + ص^{٢} + ٢س - ٢ص = ٣$

أ. متباعدتان **ب.** تتماسّان خارجيًّا **جـ.** تتماسّان داخليًّا

د. إحداهما داخل الأخرى **هـ.** تتقاطعان عند نقطتين

٢ أوجد معادلة الدائرة التى مركزها (٣، −٩) وتمسّ الدائرة $(س - ٣)^{٢} + ص^{٢} = ٩$ داخليًّا.

★ التحدّى

أوجد معادلة الدائرة التى مركزها (−١، −٢) وتمسّ الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} - ٤س - ٤ص + ٤ = ٠$ خارجيًّا.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٤-٢٥
الرياضيات

نقاط تقاطع دائرتين

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

نواتج التعلّم

إيجاد إحداثيات نقاط تقاطع دائرتين.

لاحِظ!

لإيجاد إحداثيات نقاط تقاطع دائرتين، أو معادلة المستقيم المارّ بنقاط التقاطع، **أنشئ معادلات آنية وحُلّها**.

استعِدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معادلة المستقيم المارّ بنقطتَى تقاطع الدائرتين $س^{٢} + ص^{٢} = ٤$ ، $س^{٢} + ص^{٢} + ٢س - ٤ص = ٩$

٢ أوجد إحداثيَّى نقطتَى تقاطع الدائرتين $س^{٢} + ص^{٢} = ١٠$ ، $س^{٢} + ص^{٢} + ٢س - ص = ٥$

طريقة الحلّ

١ بحلّ معادلتَى الدائرتين آنيًّا:

$$\left\{\begin{array}{l} س^{٢} + ص^{٢} = ٤ \quad \ldots\ldots (١) \\ س^{٢} + ص^{٢} + ٢س - ٤ص = ٩ \quad \ldots\ldots (٢) \end{array}\right.$$

بطرح (٢) من (١) نحصل على:

$$-٢س + ٤ص = -٥$$

$$ص = \frac{١}{٢}س - \frac{٥}{٤}$$

إذن، المعادلة المطلوبة هى:

$$ص = \frac{١}{٢}س - \frac{٥}{٤}$$

٢ بحلّ معادلتَى الدائرتين آنيًّا:

$$\left\{\begin{array}{l} س^{٢} + ص^{٢} = ١٠ \quad \ldots\ldots (١) \\ س^{٢} + ص^{٢} + ٢س - ص = ٥ \quad \ldots\ldots (٢) \end{array}\right.$$

بطرح (٢) من (١) نحصل على:

$$-٢س + ص = ٥$$

$$ص = ٢س + ٥ \quad \ldots\ldots (٣)$$

وبالتعويض بـ(٣) فى (١) نحصل على:

$$س^{٢} + (٢س + ٥)^{٢} = ١٠$$

$$٥س^{٢} + ٢٠س + ١٥ = ٠$$

$$س^{٢} + ٤س + ٣ = ٠$$

$$س = -٣ ، -١$$

وبالتعويض بهاتين القيمتين فى (٣):

عندما س = −٣ يكون ص = −١

عندما س = −١ يكون ص = ٣

إذن، إحداثيا نقطتَى التقاطع هما

(−٣، −١)، (−١، ٣)

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حاوِل

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معادلة المستقيم المارّ بنقطتَى تقاطع الدائرتين $س^{٢} + ص^{٢} = ٦$ ، $س^{٢} + ص^{٢} + ٣س + ٣ص = ٩$

٢ أوجد إحداثيَّى نقطتَى تقاطع الدائرتين $س^{٢} + ص^{٢} = ٤$ $(س - ٤)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ١٦$

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معادلة المستقيم المارّ بنقطتَى تقاطع الدائرتين الآتيتين.

(أ) الدائرتان $س^{٢} + ص^{٢} = ١٠$ ، $س^{٢} + ص^{٢} - ١٢س + ٦ص = ٣$

(ب) الدائرتان $س^{٢} + ص^{٢} = ٤$ ، $(س - ١)^{٢} + ص^{٢} = ٤$

٢ أوجد إحداثيَّى نقطتَى تقاطع الدائرتين $س^{٢} + ص^{٢} = ٥$ ، $(س - ٢)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ١$

★ التحدِّى

تتعقّب محطّتا رادار متعدّدتا الاتجاهات طائرةً بدون طيّار.

تغطّى محطّة «ألفا» النطاق $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$

وتغطّى محطّة «بيتا» النطاق $(س + ٥)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٦٥$

ولتحديد المواضع التى تنتقل عندها الطائرة بين نطاقَى الرادارين بالضبط، أوجد نقاط تقاطع حدود إشارتَيهما.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقِشوا الإجابة.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٤-٢٦
الرياضيات

دائرة تمرّ بنقاط تقاطع دائرتين

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

نواتج التعلّم

إيجاد معادلة الدائرة المارّة بنقاط تقاطع دائرتين أخريين.

لاحِظ!

- منحنى يمرّ بنقطتَى تقاطع الدائرتين $س^{٢} + ص^{٢} + ف س + ق ص + ر = ٠$ و $س^{٢} + ص^{٢} + ل س + م ص + ن = ٠$ يمكن التعبير عنه كما يلى:

$$ك(س^{٢} + ص^{٢} + ف س + ق ص + ر) + (س^{٢} + ص^{٢} + ل س + م ص + ن) = ٠$$

اضرب إحدى المعادلتين فى ك وأضِفها إلى المعادلة الأخرى.

- عند كتابة المعادلة النهائية للدائرة، تأكّد من أنّ معاملَى $س^{٢}$ ، $ص^{٢}$ يساويان ١

استعِدّ

أوجد معادلة الدائرة المارّة بنقطتَى تقاطع الدائرتين $س^{٢} + ص^{٢} - ٢س - ٦ص + ٥ = ٠$ و $س^{٢} + ص^{٢} = ٥$، وبالنقطة (٠، ٣).

طريقة الحلّ

الشكل المارّ بنقطتَى تقاطع هاتين الدائرتين يمكن التعبير عنه بـ

$$ك(س^{٢} + ص^{٢} - ٢س - ٦ص + ٥) + (س^{٢} + ص^{٢} - ٥) = ٠ \quad \ldots\ldots (١)$$

وبما أنّ الدائرة تمرّ بالنقطة (٠، ٣):

$$ك(٠^{٢} + ٣^{٢} - ٢ \times ٣ - ٦ \times ٠ + ٥) + (٠^{٢} + ٣^{٢} - ٥) = ٠$$

$$٨ك + ٤ = ٠$$

$$\text{إذن، } ك = -\frac{١}{٢}$$

وبالتعويض بها فى (١) وإجراء الحساب نحصل على:

اجعل معاملَى $س^{٢}$ و$ص^{٢}$ يساويان ١.

$$\frac{١}{٢}س^{٢} + \frac{١}{٢}ص^{٢} + س + ٣ص - \frac{١٥}{٢} = ٠$$

إذن، $س^{٢} + ص^{٢} + ٢س + ٦ص - ١٥ = ٠$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاوِل» ثم ناقِشوا إجابتكم.

حاوِل

أوجد معادلة الدائرة المارّة بنقطتَى تقاطع الدائرتين $س^{٢} + ص^{٢} - ٤س - ٢ص - ٨ = ٠$ و $س^{٢} + ص^{٢} = ٤$، وبنقطة الأصل.

التحدّى

أوجد معادلة الدائرة المارّة بنقطتَى تقاطع الدائرتين

$س^{٢} + ص^{٢} - ٢س - ٦ص + ٦ = ٠$

$س^{٢} + ص^{٢} + ٤س - ٢ص - ١١ = ٠$

وبالنقطة (٢، ٢).

تدرَّب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معادلة الدائرة المارّة بنقطتَى تقاطع الدائرتين $س^{٢} + ص^{٢} - ٢س - ٤ص + ٣ = ٠$ و $س^{٢} + ص^{٢} = ٤$، وبالنقطة (٣، ٠).

٢ أوجد معادلة الدائرة المارّة بنقطتَى تقاطع الدائرتين $س^{٢} + ص^{٢} - ٦س - ٨ص = ٠$ و $س^{٢} + ص^{٢} - ١ = ٠$، وبالنقطة (-٣، ٢).

٣ أوجد معادلة الدائرة المارّة بنقطتَى تقاطع الدائرتين $س^{٢} + ص^{٢} - ٢س - ٢ص = ٠$ و $س^{٢} + ص^{٢} - ٦س - ٤ص + ١٢ = ٠$، وبالنقطة (٤، ٠).

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

وزارة التربية والتعليم والتعليم الفني

فريق الإعداد والاعتماد

قائد المشروع والمدير التحريري

Maki Komizo

المحررون والمؤلفون

Tomoaki Tsunoyama
Yukihiro Kawakubo
Yosihito Kosaka
Ritsu Igarashi

المصممون

Sayaka Higuchi

المراجعون

أ.د جلال محروس معتمد
أ.د احمد عبد القادر
أ.د محمد محمد علي
أ.د طه محمد مرسي
أ. منال عباس احمد
د. محمد محي الدين
أ. عثمان مصطفي عثمان
أ. سامح عبد الباسط السيد

الإدارة المركزية لتطوير المناهج

الإشراف العام

د. جبريل أنور حميدة

رئيس الإدارة المركزية لتطوير المناهج

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم والتعليم الفني - 2026 / 2027

لا يجوز إعادة إنتاج أي جزء من هذا الكتاب أو تخزينه في نظام لاسترجاع المعلومات أو نقله بأي صورة أو وسيلة، إلكترونية أو بالتصوير أو التسجيل أو غير ذلك، من دون إذن كتابي مسبق من وزارة التربية والتعليم والتعليم الفني.

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

EDUCATION SPRINGS NEW LIFE

SPRIX

CACD

class	name

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

موقع الدكتور محمد رزق التعليمي

امسح الباركود بالموبيل لتثبيت التطبيق وتحميل كل الملازم مجانا وبسرعه

MR

حمل التطبيق الأن

GET IT ON Google Play

ملازم ابتدائي | ملازم اعدادي | ملازم ثانـــوي | كورسات ونتائج امتحانات

موقع الدكتور محمد رزق
Dr.MoRizK